正誤表

このアプリケーション・ノートに間違いがありましたので、お詫びして訂正いたします。
この正誤表は、2010 年 2 月 12 日現在、アナログ・デバイセズ株式会社で確認した誤りを記したものです。
なお、英語のアプリケーション・ノート改版時に、これらの誤りが訂正される場合があります。

正誤表作成年月日： 2010 年 2 月 12 日
アプリケーション・ノート：AN-741
対象となるアプリケーション・ノートのリビジョン(Rev)：Rev.0
訂正箇所：
1） P.2 図 2.
図 2 の式中のルートの中は、「$f_H - f_H$」となっていますが、正しくは「$f_H - f_L$」となります。

2）P.3
「サンプリングされたデータの位相ノイズ」の 7 段落目「図 5b は、」から始まる文中「fclk ~ fsig」となっていますが、正しくは「fsig – fclk」です。日本語のアプリケーション・ノートの当該部分については、「fsig – fclk」と修正しております。

3）P.4
「サンプリングされたデータの位相ノイズ」の 8 段落目「図 5c は、」から始まる文中「124.72 MHz」になっていますが、正しくは「126.72 MHz」です。日本語のアプリケーション・ノートの当該部分については、「126.72 MHz」と修正しております。

アナログ・デバイセズ株式会社

本　　社／〒105-6891 東京都港区海岸 1-16-1
ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36
新大阪トラストタワー
電話 06（6350）6868

位相ノイズの知られざる特性

著者：Paul Smith

はじめに

位相ノイズについて、その特性[1]、測定方法[2]、システム性能に与える影響[3]など、すでに豊富な情報があります。最新の無線システムでは、発振器やクロックの位相ノイズが限定的な形であれ1つの劣化の原因になるということがよく知られてます。しかし、従来の解析手法では多くの場合、シングル・キャリア無線システムにおけるサイン波信号の劣化という問題にしか目が向けられていませんでした。マルチキャリア・レシーバ、ワイドバンド・システム、デジタル・ラジオなどのシステムにおいて位相ノイズの影響について論じられることはあまりありませんでした。このアプリケーション・ノートでは、サンプリングされたデータでの位相ノイズに関連して、いくつかのほとんど取り上げられることのない問題について論じます。主に、マルチキャリア無線、ワイドバンド信号、アンダーサンプリングされた無線方式に焦点を合わせます。

サンプリングされたデータの位相ジッタ

サンプリングされたデータでの位相ノイズによって生じるS/N比の劣化を計算する最も簡単な方法は、位相ノイズを位相ジッタに変換する方法です。これを最も容易に実現するには、特定の周波数における時間遅延を位相遅延と等価であると見なすことです。この考え方を拡張し、それをノイズ・パワーの観点から記述すると、式1が得られます。

$$\sigma_\theta^2 = \omega_{clk}^2 \sigma_t^2 \qquad (1)$$

ここで、σ_θ = 位相ノイズ（単位：rms ラジアン）

σ_t = 位相ジッタ（単位：rms 秒）

ω_{clk} = クロック周波数（単位：ラジアン／秒）

つまり、特定のジッタ誤差に対して、高い周波数信号では位相誤差が増えるということです。σ_θという項は、クロック[4]の位相ノイズの積分値の合計であり、クロックのS/N比を次のように定義します。

$$SNR_{clk}(dB) = -10\log\left(\sigma_\theta^2\right) \qquad (2)$$

したがって、式1は、位相ノイズの積分値の合計（つまりクロックのS/N比）とクロック内のジッタ合計との関係を示します。位相ノイズとクロック・ジッタは、同じ現象を異なる観点から見たものです。

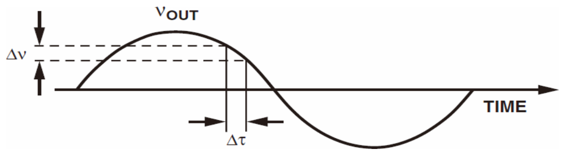

図 1.

従来のサンプリングされたデータのS/N比解析では、サンプリングされたデータの誤差にクロックのノイズがどう影響するかを判定する手掛かりとして図1を使用します。これにより、以下の関係がわかります。

$$\Delta v(t) = \Delta t \times v'_{out}(t)$$

$$E\left\{\Delta v^2(t)\right\} = E\left\{\Delta t^2 \times v'^{\,2}_{out}(t)\right\}$$

$$E\left\{\Delta v^2(t)\right\} = E\left\{\Delta t^2\right\} \times E\left\{v'^{\,2}_{out}(t)\right\}$$

平均値ゼロ、他の関数と相関なく独立してる。

したがって、次式が成立します。

$$\sigma_{err}^2 = \sigma_t^2 \times E\left\{v'^{\,2}_{out}(t)\right\}$$

ここで、σ_t^2 の単位は(rms 秒)^2

これにより、ノイズ・パワーは、信号の導関数のパワーとジッタ・パワーの関数であることがわかります。

ジッタの多いクロックでサンプリングされた信号のS/N比は、次のように定義されます。

$$SNR_{sig} = \frac{\text{power in signal}}{\text{power in noise}} = \frac{\sigma_{out}^2}{\sigma_{err}^2} = \frac{1}{\sigma_t^2}\frac{E\left\{v_{out}^2(t)\right\}}{E\left\{v'^{\,2}_{out}(t)\right\}} \qquad (3)$$

たとえば、単一サイン波では、

$$v_{out}(t) = A\sin\omega_O t$$

$$v'_{out}(t) = A\,\omega_O\cos\omega_O t$$

したがって、次式が成立します。

$$E\left\{v_{out}^2(t)\right\} = \text{power in } v_{out}(t) = \frac{A^2}{2}$$

$$E\left\{v'^{\,2}_{out}(t)\right\} = \text{power in } v'_{out}(t) = \frac{\omega_O^2 A^2}{2}$$

アナログ・デバイセズ株式会社

本　　社／〒105-6891　東京都港区海岸 1-16-1　ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003　大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36　新大阪トラストタワー
電話 06（6350）6868

式 3 を用いると、次のようになります。

$$SNR_{sig} = \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{\omega_O^2 A^2}{2}} = \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{1}{\omega_O^2} \quad (4a)$$

$$SNR_{sig} = \frac{1}{4\pi^2 f_O^2 \sigma_t^2} \quad (4b)$$

（シングル・キャリア・システムの場合）

これは、ジッタのあるクロックによってサンプリングされた単一サイン波の標準的な S/N 比式であり、多くの資料[5]に記載されています。当然ながら、高周波数の信号になるほどスルーレートが大きくなります。したがって、サンプル時間の変化とともに、より大きな電圧変化が生じることになります。データ・コンバータからの全ノイズを得るには、これに量子化ノイズと熱ノイズも追加する必要があります。

これはマルチキャリア信号にも簡単に応用できます。v_{out}を n 個の等しい振幅を持つサイン波の和と定義して、前と同じ手順を用います。

$$E\left\{v_{out}^{\,2}(t)\right\} = \frac{nA^2}{2}$$

$$E\left\{v'_{out}{}^{2}(t)\right\} = \frac{A^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \omega_n^2\right)}{2}$$

$$SNR_{sig} = \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{\frac{nA^2}{2}}{\frac{A^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \omega_n^2\right)}{2}} = \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{n}{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \omega_n^2\right)} = \frac{n}{4\pi^2 \sigma_t^2 \sum_n f_i^2}$$

これは信号全体（v_{out}）を基準にしています。キャリアの 1 つだけを基準にすると、S/N 比は次のようになります。

$$SNR_{sig} = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_t^2 \sum_n f_i^2} \quad (5)$$

（マルチキャリア・システムでのシングル・キャリアについて）

シングル・キャリアの場合（式 4b）と比べると、分母は周波数項が n 個増えます。キャリア当たりの S/N 比（つまり dBc）は、約 10 log(n)だけ低下しています。しかし、信号統計によると、データ・コンバータで量子化回路のクリッピングを避けるには、各キャリアを 10 log(n)～20 log(n)低下させる必要があるでしょう。これにより、量子化ノイズ、熱ノイズのノイズ・フロアは、実質的に最大 20 log(n)だけ上昇します。したがって、シングル・キャリアの場合に比べて、ジッタが S/N 比全体に与える影響は小さくなります。つまり量子化ノイズ、熱のノイズがより支配的になるでしょう。

最新の無線システムの多くは、ナローバンド・キャリアを使用しません。変調されたデータは、一般的にかなり広いスペクトルを占めます。クリック・ジッタがこのようなシステムの S/N 比にどう影響するかを判定するには、データは平均がゼロで、図 2 に示すように f_L と f_H の間（$f_L < f_H$）で一様に分布する平坦なスペクトルを持つと想定すると便利です。帯域幅全体にわたって 2 乗して積分すると、全信号パワー σ^2_{out} が得られます。

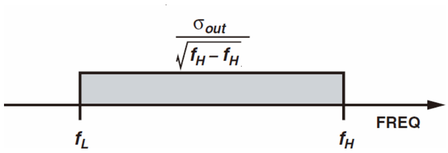

図 2.

パーセバルの定理の式に従えば、時間領域における信号のパワーが、周波数領域における信号のパワーと等価になります。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(f)|^2 \, df$$

ここで、$|g(f)|^2$ はパワー・スペクトル密度（単位：*W/Hz*）です。

さらに、フーリエ変換の微分法を使用すると、次に示すように、フーリエ変換の導関数は、元のフーリエ変換の関数に $i\omega$ 倍した値になります。

$$\Im\left[v'(t)\right] = i\omega \Im\left[v(t)\right]$$

これとパーセバルの定理を組み合わせると、次に示すように、$v'(t)$ で表したパワーは $i\omega g(\omega)$ で表したパワーと同じであることがわかります。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(v'(t)\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |i\omega g(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |g(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f)^2 |g(f)|^2 \, df$$

f_L と f_H の間でのみ $\frac{\sigma_{out}}{\sqrt{f_H - f_L}}$（そして、それ以外ではゼロ）の場合、これは次のようになります。

$$E\left\{v'_{out}(t)^2\right\} = \int_{f_L}^{f_H} (2\pi f)^2 \frac{\sigma_{out}^2}{\left(f_H - f_L\right)} df$$

$$E\left\{v'_{out}(t)^2\right\} = \frac{\sigma_{out}^2}{f_H - f_L} \int_{f_L}^{f_H} (2\pi f)^2 df$$

$$E\left\{v'_{out}(t)^2\right\} = \frac{4\pi^2\left(f_H^3 - f_L^3\right)\sigma_{out}^2}{3\left(f_H - f_L\right)} = \frac{4\pi^2\left(f_H^2 + f_H f_L + f_L^2\right)\sigma_{out}^2}{3}$$

式 3 を使用して、

$$SNR_{sig} = \frac{1}{\sigma_t^2} \frac{3}{\left(f_H^2 + f_H f_L + f_L^2\right)}$$

これは、f_L と f_H の間で平坦なワイドバンド信号が、ジッタ σ_t を持つクロックによってサンプリングされた結果の S/N 比です。ここでサニティー・チェックとして、$f_L = f_H = f_O$（つまり、すべてのパワーが単一周波数項 f_O に存在）に設定すると、単一周波数の場合の式 4b と同じ式になります。

$f_L = f_O - BW/2$ および $f_H = f_O + BW/2$ とすることにより式は別の表し方ができます。この場合、信号の帯域幅が BW で、f_O を中心とする平坦な信号とすると式は次のようになります。

$$SNR_{sig} = \frac{1}{4\pi^2\sigma_t^2\left(f_O^2 + \frac{BW^2}{12}\right)} \tag{6}$$

さらにここでまたサニティー・チェックとして、$BW = 0$ とすると、結果は式 4b のシングル・キャリアの場合と一致します。

このような計算の結果、$f_O > 10BW$ である限り、おそらく信号の帯域幅は無視できる程度となることがわかります。変調信号をシングル・キャリアとして扱っても、実質的に等しい結果が得られます。しかし、上記の前提条件にあてはまらない場合に、シングル・キャリア近似を用いると、かなり楽観的な結果になってしまうでしょう。

ここまでの議論はすべてサンプリングされたデータ・システムを中心に説明してきましたが、エイリアシングの影響には触れていません。いままで導いてきた式はすべて、エイリアシングがないものと仮定しています。ジッタの帯域幅は、単一のナイキスト領域内に完全に収まると（都合よく）見なされています。ジッタがひどく、しかも信号がナイキスト領域の境界に近い場合は、ジッタに起因するノイズが信号帯域内に折り返して、S/N 比をさらに低下させることがあります。この影響を図 3 に示します。クロック・フィードスルーにも類似の問題が存在します。信号がクロックに近い場合、クロックからの位相ノイズが出力に直接漏れて、ノイズ・フロア特性を低下させることがあります。

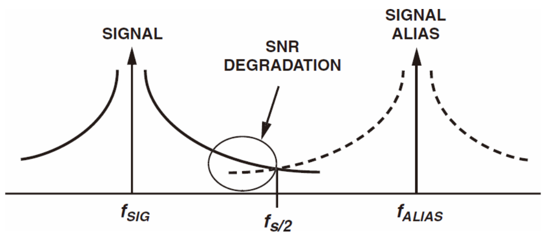

図 3.

サンプリングされたデータの位相ノイズ

さらに、これまでの説明ではクロック位相ノイズのスペクトルは考慮されていません。考慮されたのは、式 1 を用いた位相ノイズの積分値の合計から計算された全ジッタ（単位 : rms 秒）だけでした。クロックの位相ノイズ・スペクトルがサンプリングされたデータ・スペクトルにどう影響するかを見るには、単一のサイン波信号を使用するのが一番便利です。式 1 と 4a を組み合わせると、式 7a が得られます。

$$SNR_{sig} = \frac{1}{\sigma_\theta^2}\left(\frac{f_{clk}}{f_{sig}}\right)^2 \tag{7a}$$

式 2 を使用して、これは次のように記述できます。

$$SNR_{sig} = SNR_{clk}\left(\frac{f_{clk}}{f_{sig}}\right)^2 \tag{7b}$$

結果として得られるサンプリングされた信号の S/N 比は、クロックの S/N 比と同じですが、クロックと信号の周波数比によって変わります。信号周波数が高くなるにつれて、S/N 比は 20 log の形で低下します。このことから、アンダーサンプリングされたシステム（つまり、信号周波数が高次のナイキスト帯域の 1 つを占めるシステム）がベースバンド・システムよりもはるかに良い位相ジッタを持つクロックを必要とするかがわかります。実際、IF サンプリングのデジタル・ラジオ方式での性能は、しばしばデータ・コンバータの性能ではなく、クロック位相ノイズによって制限されます。式 7b からは明らかではありませんが、図 3 に示すように、クロック位相ノイズのスペクトル形状は、サンプリングされたデータに重畳します。このことは、ミキサー回路のサンプリング・プロセスを考えてみると直観的に理解できます。図 4 に示すように、位相ノイズ θ を持つクロックをミキサーに印加すると、出力は 2 つの乗算を加算した形になってますが、それぞれの乗算式にクロックの完全な位相ノイズ θ を含みます。この簡単なモデルでは式 7 で記述されたスケールファクタは示されていませんが、クロックの位相スペクトルが得られて結果の信号にどのように現れるかを明らかにするのに役立ちます。

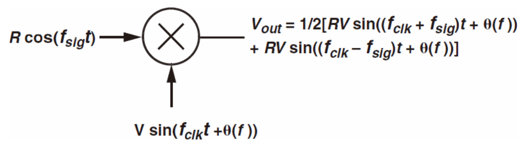

図 4.

このことは、クロックを位相変調し、それを A/D コンバータ（ADC）に入力ことによって簡単にテストできます。何種類かの信号周波数を印加することで、式 7 も検証できます。ここでは、AD9430 ADC を、最初のサイドバンドが－60dBc になるように位相変調したクロック 61.44MHz で駆動しました。実験の結果を図 5a、図 5b、図 5c に示します。

図 5a は、入力信号が 3.84MHz のときの結果を示します。クロックの変調された成分は、信号の基本波近くに集まった 2 つの小さなスプリアスとして認識できます。式 7 によれば、クロックの変調スプリアスは、–60 – 20 log(61.44/3.86) = –84dBc となります。図 5a の結果を見ると、この数値にきわめて近いものになってます。

図 5b は、65.28MHz を入力したときの結果を示します。これは 3 次ナイキスト領域に含まれます。FFT 解析によればベースバンドのエイリアスが図 5a の 3.84MHz（つまり、65.28MHz – 61.44MHz = 3.84MHz）信号と同じ位置に現れます。ここでは、fclk-fsig および –60dBc のクロック・スプリアスが、折り返されていることが容易にわかります。これは式 7b によって予想されることです。

図 5c は、5 次ナイキスト領域における 126.72MHz の入力による結果を示します。この周波数は図 5b の周波数の約 2 倍であり、式 7 によれば、スプリアスが約 6dB 増加するはずであり、実際にそうなっています。

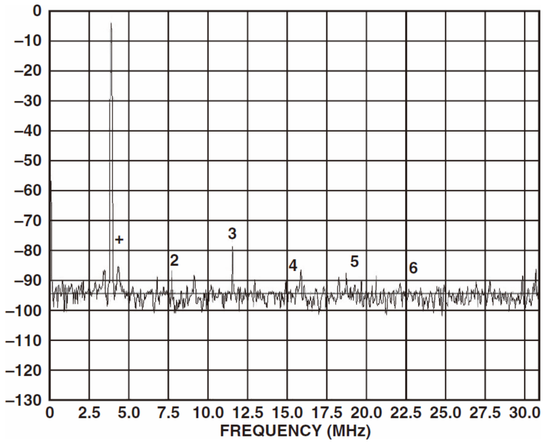

図 5a.

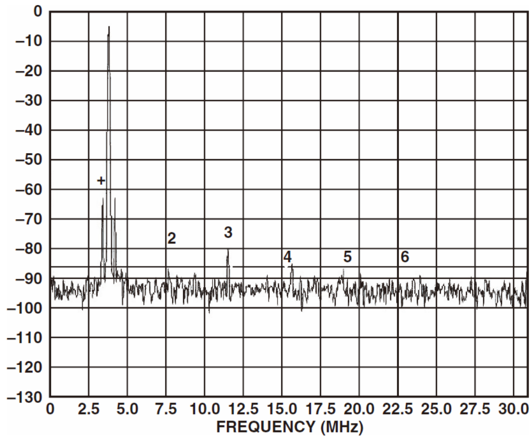

図 5b.

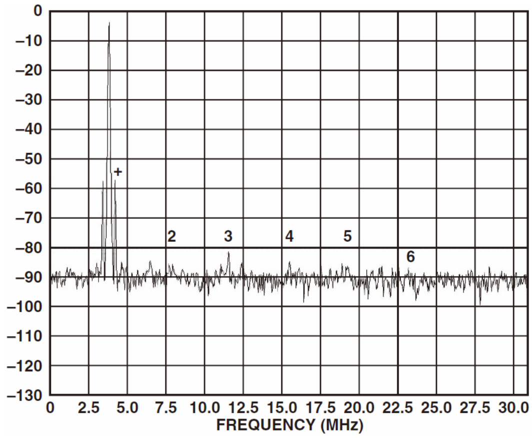

図 5c.

したがって、クロック・スペクトルは、式 7 で記述されたスケールファクタにより、サンプリングされた信号の周囲に実際に現れるように思われます。しかし、今までの説明では、A/D コンバータ（ADC）と D/A コンバータ（DAC）を区別してきませんでした。DAC も ADC と同じ特性を示すのでしょうか？そこで、AD9744 DAC でも類似の実験を行いました。この場合は、–40dBc のサイドバンドが得られるように位相変調された 61.44MHz のクロックを使用し、11MHz のサイン波を生成しました。図 6 には、5 つのナイキスト帯域での結果を示します。

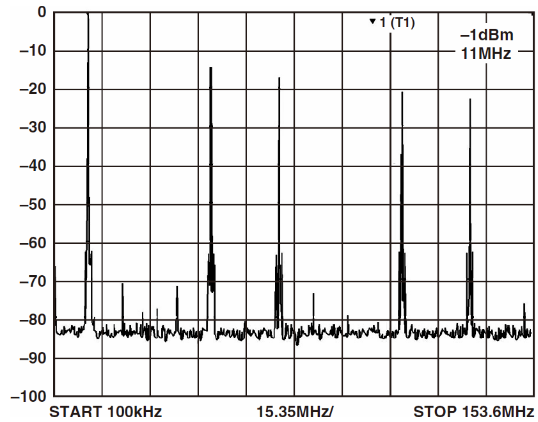

図 6.

DAC 出力には固有の Sinc 関数を明らかに観察できます。しかし、クロック・スプリアスはどうでしょうか？ クロック・スプリアスはそれぞれの出力信号イメージ付近で明らかに見られますが、ADC の場合とは異なり、振幅は増加しません。フルスケールを基準にして、スプリアス振幅は一定のままです。

これを調べるにはいくつかの方法があります。dBc 単位で見た場合、信号周波数が上がるにつれて、変調スプリアスは、式 7b に述べられているのと同じように悪化します。Sinc 関数は、信号振幅と誘引されたクロック位相ノイズの両方に適用されます。各キャリアを基準にして（つまり、dBc 単位で）スプリアス振幅を計算する場合には、式 7b がよくあてはまります。

あるいは、Sinc 特性は次のように定義されます。

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\pi f_{sig}}{f_{clk}}\right)}{\dfrac{\pi f_{sig}}{f_{clk}}}$$

ノイズの振幅は、式 7a の逆数で与えられます。

$$\frac{N}{S} = \sigma_\theta^2 \left(\frac{f_{sig}}{f_{clk}}\right)^2$$

つまり、ノイズはクロック位相ノイズと信号周波数に正比例します。Sinc 関数を 2 乗し（パワー・スペクトル密度を調べるため）、これら 2 つを乗算して DAC からの複合ノイズ伝達関数を求めると、次のようになります。

$$\frac{N}{S} = \sigma_\theta^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi f_{sig}}{f_{clk}}\right)}{\pi^2}$$

サイン波は周期的な関数で平均値はゼロです。しかし、Sinc 関数の分母が高周波数でのロールオフを引き起こしています。この減衰は、式 7b に述べられてるようにより高い周波数での位相ノイズの増加によって確実に相殺されました。したがって、DAC からの位相ノイズは高周波数では増加しません。

システム・デバッギングへの応用

信号劣化を最小限に抑えるためのシステム設計上明らかな留意点に加えて、これらの結果に対しては、触れておくべき影響が他にもいくつか存在します。それは、原因不明のスプリアスやノイズの発生源を発見する作業に関するものです。たとえば、DAC 出力においてノイズ・フロアが上がった場合は、ほとんどの場合、その原因はクロック位相ノイズに起因するものではないようです。出力回路へのデジタル結合が原因である可能性あります。

サンプリングされた信号にスプリアスが存在する場合、それがクロックから来たものかどうかを確認するには、信号振幅を変化させてみるとよいでしょう。アナログ歪み項は、信号振幅変化率の 2 倍（2 次歪み）または 3 倍（3 次歪み）で変化します。量子化回路の非直線性に起因するスプリアスは、まったく変化しないか、変化した場合でも、信号振幅の変化時に予測不能な変化を示します。一方、クロックに起因するスプリアスは、dB 単位の信号に対し dB 単位で変化します。

サンプリングされたデータ信号のスプリアス源を特定しようとするときは、信号が出力に直接結合することで生じる明白なスプリアス周波数を調べるだけでなく、信号からの周波数オフセットも調べてください。たとえば、スプリアスがキャリアから 10MHz 離れている場合は、システム内のどこかに 10MHz の発振源があるかどうかを確認してください。これがある場合は、この周波数がクロックを通じて漏れている可能性があります。

要約

このアプリケーション・ノートでは、位相ノイズとジッタの関係を調べて、ジッタを持つクロックによって信号がサンプリングされたときに生じる S/N 比の劣化を導き出しました。その結果は、マルチキャリアおよびワイドバンドの変調されたデータにも適用できることが確認されました。続いてクロック位相ノイズのスペクトル問題を取り上げ、ADC と DAC の出力で得られるスペクトルを検証しました。最後に、これらの結果は、システムに説明困難な、異常なスプリアスが生じた場合のデバッギングに適応できることが示されました。

注

[1] W. P. Robins, *Phase Noise in Signal Sources* (London: Peter Peregrinus Ltd., 1982)

[2] "Understanding and Measuring Phase Noise in the Frequency Domain," Hewlett Packard, Application Note 207, 1976

[3] Stanley J. Goldman, *Phase Noise Analysis in Radar Systems Using Personal Computers* (New York: John Wiley & Sons, 1989)

[4] "VCO Phase Noise," Mini-Circuits, Application Note #2

[5] "Linear Design Seminar," Analog Devices, Inc., Norwood, MA, 1995, pp. 5-20

AN04985-0-8/04(0)-J