

アナログ・フィルタの伝達関数をデジタル・フィルタに変換する「双一次変換」とは 「シミュレーション仮説」と同じように計算により仮想的に信号が処理される

著者: 石井 聡

はじめに

ヨタヨタ毎回進んでいる Web ラボ。今回も与太話から始めましょう。それでも 96 回目になりました…。

「シミュレーション仮説」をお話ししよう

あなたは信じるか、「シミュレーション仮説 [1]」。シミュレーション仮説とは、自分の周りはずべてシミュレーションで成り立っている、という考え方です。昔「マトリックス [2]」という映画があり、かなりの興行収入となりましたが、この映画の構成と同じ概念とも言えるものです。テスラ社のイーロン・マスク (Elon Reeve Musk) 氏の発言や投資銀行・メリルリンチ社が出したレポート [3]からも、多くの人が注目し、その可能性・確率がかかなり高いこと(誰も証明できるものではありませんが。いつまで経っても「仮説」のままでしょう)が分かります。私は子供のころからシミュレーション仮説と同様なことを考えており、いつかはこの Web ラボでも書こうと思っていたものです。私だけではなくても、多くの人が同様な気づきに至ったものではないかと思えます。

「シミュレーション仮説」にはふたつの考え方がある

シミュレーション仮説にはふたつの考え方があります。ひとつはコンピュータ上で宇宙全体がシミュレーションされており、また複数の「意思」が存在していて、その「意思」、つまり複数の脳みそからその宇宙全体の動きが見える、という考えかたです。複数の「意思」同士はコンピュータ上に存在しているわけなので、相互に疎通することができます。宇宙全体の動きが見えるとはいえ、実際は「意思」に対する「刺激(ステイミュラス)」を生じさせることにより、仮想的に「見せている」と言ったほうが適切でしょう。

しかしこのひとつめの考え方(宇宙全体をシミュレーション)はコンピュータの計算能力や容量に、非常に高く・大きいものが必要となるため、かなり大掛かりなものとなってしまいます。

もうひとつの考え方、これは私が小学校のころに気づきに至った考え方、これをご紹介します。こちらはずっと単純です。

「意思」はひとつ(自分のみ)しか存在せず、その「意思」の周囲の環境(景色)をコンピュータがシミュレーションしている、というものです。単一の「意思」は水槽の培養液中に浮かんで電極が差し込まれた脳としてイメージすることもできます。私が小学校のころに気づきに至ったイメージはこの「水槽に浮かぶ脳」でした。

この考え方は、逆にいうと「自分以外には何も実態がないんだ」というものです。世界には自分しか存在せず、その周りはシミュレーションで見せられているだけなのです。この考え方は恐ろしいもので、たとえばこの Web ラボの記事は「私が書いているだけで、誰も読んでいない」ということになるわけです。

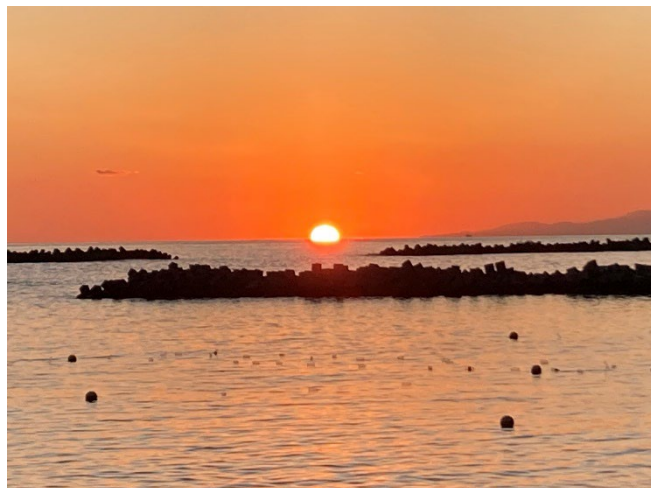


図 1. すべてはシミュレーションなのか
(海に沈む夕日。本当に美しい)

誰も読んでいない、つまり書いていることが無駄となるわけですね(笑)。恐ろしい話しです(笑)。

双 1 次変換とは

双 1 次変換は s 領域と z 領域をつなぐもの

アナログ・フィルタをデジタル・フィルタに変換する手法に双 1 次変換 (Bilinear Transformation) というものがあります。「シミュレーション仮説」同様、現実世界をコンピュータ(もしくはデジタル)世界に写像するひとつの手法といえるのではないのでしょうか。

これは

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (1)$$

として s 領域(連続時間での周波数軸)と z 領域(離散時間システム。 z は離散時間軸での表記でもあり、周波数軸でもある…と理解しています。 z に -1 がついていいるのはサンプリング・レート 1 クロックぶんの遅延を意味します)を関連づけるものです [4]。ここで T_s はサンプリング・レート、 z^{-1} は 1 タップの遅延を表します。

まずは z 変換の考え方

図 2 をご覧ください。この図は z 変換の考え方を示しています。これは CK (クロック) で IN から入ってくるワード(複数ビット)をブロック T_s でラッチし、そのワードを次段に伝搬させる回路です。ここで T_s はさきと同じく 1 遅延に相当しますが、これが z^{-1} です。2 遅延になると z^{-2} という考え方です。

アナログ・デバイセズ株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2023 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-096

また図3は

$$OUT = IN(1 + z^{-1}) \quad (2)$$

という「2個のサンプルを平均する」というデジタル・ローパス・フィルタ（移動平均）です。

まずアナログ・フィルタと双1次変換されたデジタル・フィルタとの周波数特性（特性カーブ）の関係を考えておきましょう。なぜこんなことをここで書くかというのは、そういう私も「 z^{-1} は1タップの遅延を表しているだけだが、その周波数特性はアナログ・フィルタとどのように関連づけられていくのか？」とふと思ったからです。

たとえばアナログ・フィルタのカットオフ周波数が「ある」周波数だとします。それを双1次変換したデジタル・フィルタの周波数特性は、式(1)のサンプリング・レート T_s でスケールされているため、 z^{-n} の係数や z^{-n} の次数（多項式としての項の数）で「調整（適応）」されることになります。…と、関連づけられているわけですね。

双1次変換の成り立ち

式(1)に示した双1次変換とラプラス演算子 s とは、以下に説明するような関係でつながっています。この関係は[4]の145ページ以降に（たぶん他書にも）導出過程が詳しく掲載されています。ここではその考え方（エッセンス）のみを示してみましよう。

まず演算子 s は、アナログ信号（連続時間軸）処理においては「微分」を意味します。微分したい関数を $f(t)$ とし、それをラプラス変換したものを $F(s)$ とすると

$$\frac{d}{dt}f(t) \Rightarrow sF(s) - f(0+) \quad (3)$$

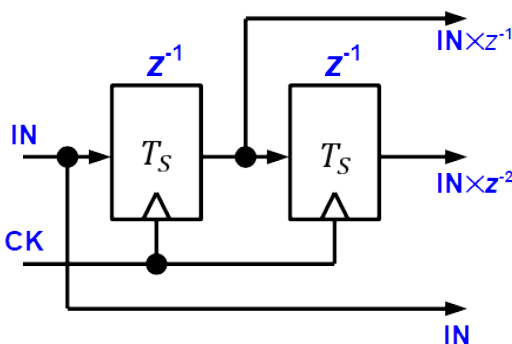


図2. z変換の考え方 (CKで遅延させるイメージ)

$$OUT = IN(1 + z^{-1})$$

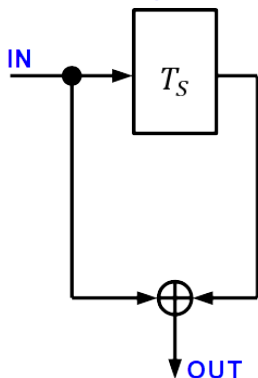


図3. $OUT = IN(1 + z^{-1})$ のブロック

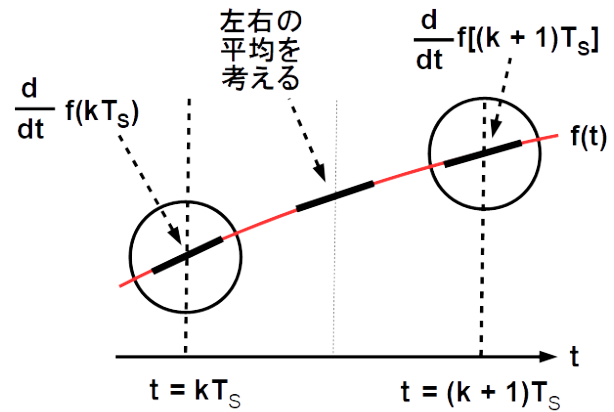


図4.2 点のサンプル微分値の平均が実際の微分値だと考える

として表されます[5]。右辺の第2項は電子回路においては無視してかまいません。これは関数 $f(t)$ についてプラス側からゼロにするものです（プラス側からのゼロの極限）。 $f(t)$ が $t=0$ で非連続な場合などに考えるべきアプローチです。

さていま、関数 $f(t)$ があったとしましょう。この微分 $g(t)$ は

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta} \Rightarrow sF(s) \quad (4)$$

として得ることができます[一番右は式(3)からです]。これを s 領域で示せば

$$G_s(s) = sF_s(s), s = \frac{G_s(s)}{F_s(s)} \quad (5)$$

とも表すことができます。ここで Δ を極限 (limit) で考えることなく、サンプリング動作として

$$\Delta = T_s \quad (6)$$

だとして考えます。繰り返しますが、極限 (limit) をとるものではありません。つまりアナログ（連続時間軸／数学）の微分と双1次変換に用いられる式というのは、まったく同一ではなく「ニアリ・イコール」だということです。ともあれ、

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta} \cong \frac{f[(k+1)T_s] - f(kT_s)}{T_s} \quad (7)$$

としてみます。 k はサンプルの番号（インデックス）です。微分で考えておらず、サンプリング動作として極限を取らず考えています。本質的に微分された値 $g(t)$ は $f(kT_s)$ と $f[(k+1)T_s]$ の中央位置のものになりますが、「変動値」になるということです。

ここで図4のように、時間 t での微分値 $g(t)$ を、ふたつの時刻（サンプリング・ポイント） $t = kT_s$ と $(k+1)T_s$ の微分値で考えてみます。ふたつの時刻の中間は k 番目のサンプルと $k+1$ 番目のサンプルの微分値の平均になります。「微分平均値」という考え方です。ここでも「ニアリ・イコール」です。

$$g(t) \cong \frac{g[(k+1)T_s] + g(kT_s)}{2} \quad (8)$$

このように平均したものとして考えれば、結局

$$\frac{g[(k+1)T_s] + g(kT_s)}{2} = \frac{f[(k+1)T_s] - f(kT_s)}{T_s} \quad (9)$$

となりますので、これをz変換を使って「1サンプル (T_s) の遅延」だとして表すと、

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-096

$$\frac{G_z(z) + z^{-1}G_z(z)}{2} = \frac{F_z(z) - z^{-1}F_z(z)}{T_s} \quad (10)$$

$$\frac{G_z(1 + z^{-1})}{2} = \frac{F_z(z)(1 - z^{-1})}{T_s} \quad (11)$$

と計算でき、これを伝達関数とすれば

$$H_z(z) = \frac{G_z(z)}{F_z(z)} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12)$$

として

$$\frac{G_s(s)}{F_s(s)} \cong H_z(z) = \frac{G_z(z)}{F_z(z)} \quad (13)$$

が得られることが分かります。式(5)

$$s = \frac{G_s(s)}{F_s(s)} \quad (5) \text{再掲}$$

と式(13)から

$$s = \frac{G_s(s)}{F_s(s)} \cong H_z(z) = \frac{G_z(z)}{F_z(z)} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (14)$$

となります。

ポイントは「ニアリ・イコール」ということです。つまりアナログ・フィルタと双1次変換されたデジタル・フィルタとでは、全く同じ出力波形／周波数特性は「得られない」ということになります。

アナログ・フィルタを双1次変換をもちいてデジタル・フィルタに変換してみる

アナログ・フィルタを双1次変換を用いてデジタル・フィルタに変換してみる例を示します。

図5に示すアナログ・ローパス・フィルタのIN/OUT間の電圧伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \quad (15)$$

これをラプラス演算子 $s = j\omega$ を用いて s の関数にしてみると

$$H(s) = \frac{1}{sCR + 1} \quad (16)$$

となります。ここに式(14)を代入してみると、

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{CR \left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2CR}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 1} = \frac{1}{\left(\frac{2CR}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + \left(\frac{T_s}{T_s} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \\ &= \frac{T_s(1 + z^{-1})}{2CR(1 - z^{-1}) + T_s(1 + z^{-1})} \\ &= \frac{T_s(1 + z^{-1})}{T_s + 2CR + (T_s - 2CR)z^{-1}} \\ &= \frac{T_s}{T_s + 2CR} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 + \left(\frac{T_s - 2CR}{T_s + 2CR} \right) z^{-1}} \\ &= \frac{T_s}{T_s + 2CR} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - \left(\frac{2CR - T_s}{2CR + T_s} \right) z^{-1}} \end{aligned} \quad (17)$$

と双一次変換を行うことができます（一般的に $2CR - T_s > 0$ になるため、分母の第2項はマイナス）。式(17)から得られるデジ

タル・フィルタのブロック図を図6に示します。式中の分子が図中前段のFIR（Finite Impulse Response）フィルタ、分母が図中後段のIIR（Infinite Impulse Response）フィルタに相当します。この分子・分母とFIR/IIRとの関係については記載を省略します。詳細を知りたいかたはデジタル信号処理の書籍を参照してみてください。

シミュレーションで特性の差異を確認してみる

それでは式(15)、(16)で示されるアナログ・フィルタ（図5）の特性と、式(17)や図6で示される双一次変換されたデジタル・フィルタの特性とを比較してみましょう。用いる数値としては図5の定数で、 $R = 1$ 、 $C = 1$ とします。サンプリング周波数は $T_s = 1$ kHzにしています。

このシミュレーションはMATLAB 互換の GNU Octave を使用しました（デジタル・フィルタの特性はfreqzという関数を用いました[6]）。まず図7に、図5のアナログ・ローパス・フィルタによる入出力伝達特性を示します。つづいて図8に図6の双一次変換されたデジタル・フィルタによる入出力伝達特性を示します。ほぼ同じになっていることが分かりますね。

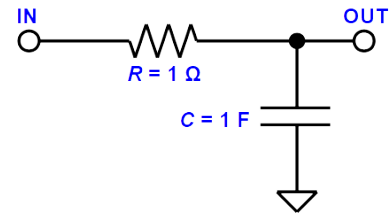


図5. アナログ・ローパス・フィルタ

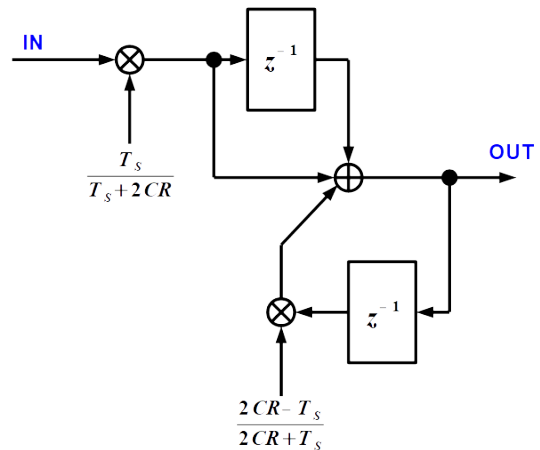


図6. 図5のフィルタを双一次変換でデジタル・フィルタに変換したもの（サンプリング周波数 1 kHz）

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-096

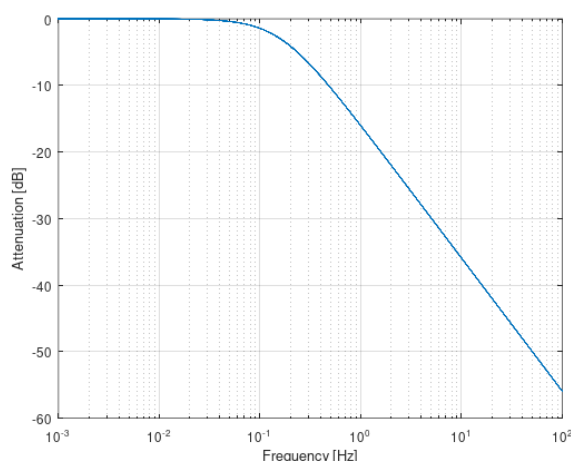


図 7. 図 5 のアナログ・フィルタの周波数特性を計算してみた
($R=1\ \Omega$ 、 $C=1\ \text{F}$)

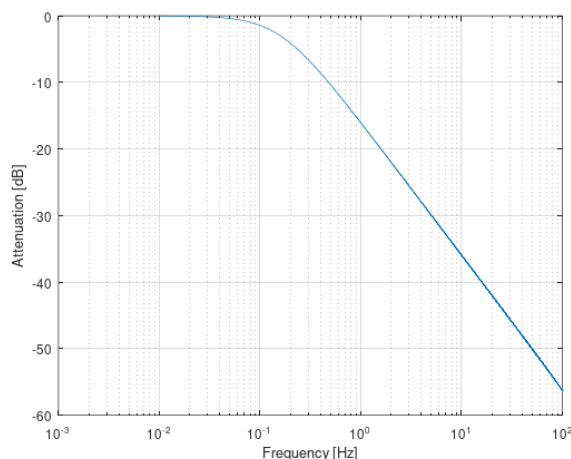


図 8. 図 6 のデジタル・フィルタの周波数特性を計算してみた
(サンプリング周波数 1 kHz。freqz という関数を用いた)

このように双一次変換を用いることで、アナログ・フィルタを「ほぼ」等価なデジタル・フィルタに置き換えることができるわけですね。ポイントは（繰り返しますが）「ニアリ・イコール」ということです。つまりアナログ・フィルタと双 1 次変換されたデジタル・フィルタとでは、「全く同じ」出力波形／周波数特性は「得られない」ということになります。

まとめ

この技術ノートでは、アナログ・フィルタの特性（ラプラス演算子 s で表されたもの）をデジタル領域 (z 変換 z で表されたもの) でフィルタ計算させるための変換手法、「双一次変換」について検討してみました。アナログ・フィルタの特性にかなり近い特性のフィルタが実現できることが分かりました。

時間があればもっとデジタル・フィルタを学んだり、FPGA に実装してみたいと思ったりする今日この頃でありました。

参考文献

[1] シミュレーション仮説, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/シミュレーション仮説>

[2] マトリックス (映画), Wikipedia, [https://ja.wikipedia.org/wiki/マトリックス_\(映画\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/マトリックス_(映画))

[3] 「この世がマトリックスの可能性は 50%」 メリルリンチの衝撃調査結果が波紋呼ぶ,
https://tocana.jp/2016/09/post_10989_entry.html

[4] 三谷 正昭; デジタル・フィルタ理論&設計入門, CQ 出版社

[5] 石井 聡; 電子回路設計のための電気／無線数学, CQ 出版社

[6] freqz, Mathworks, <https://jp.mathworks.com/help/signal/ref/freqz.html>

[7] 周波数応答, Mathworks, <https://jp.mathworks.com/help/signal/ug/frequency-response.html>