

「 $e^{j\omega t}$ とは」を考えるなかで出会うイメージ除去ミキサや超高速 ADC
(前編：数学的／回路理論的な側面を考える)

著者：石井 聡

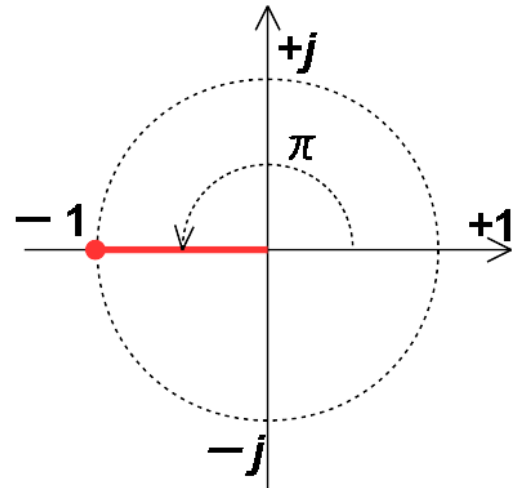
はじめに

この技術ノート・シリーズは、自分の興味ある技術分野を自分のことばで表現できる記事なので、「こんなものを書いてほしい」という要望の制約なしに、伸び伸びと、自分の興味を探求しつつ書き上げることができるものです。

今回もそんな感じで、分かっている人には「アタリマエ」、分からない人には「一体なに？」という、不思議な「 $e^{j\omega t}$ 」について解きほどこいて、考えてみたいと思います。

といってもです。「アタリマエ」として使っている／思われているとしても、「一体 $e^{j\omega t}$ は現実世界ではどのように考えればいいのか」と、数回「なぜなぜ」を繰り返せば、どこかで答えられなくなるのではないのでしょうか。

そういう私も「なぜなぜ」を繰り返されていくなかで、いつかは答えられない状況に陥ってしまいます。学術分野の方に「コイツ、わかってねーな」と見透かされるのでは、とビクビクしつつ(笑)、この技術ノートであらためて「 $e^{j\omega t}$ 」を探求してみたいと思います。


 図 1. 極座標上で表した $e^{j\pi}$
それは禅問答「本質は何か」

それは 2002 年の春でした。「武足の草鞋（にそくのわらじ）」状態から開放となれそうになった、その 2002 年の春に、ある方から禅問答をいただきました。

 「『 $e^{j\omega t}$ 』とは何か」

「禅問答」としてしまうと、その方には失礼なのかもしれません。何かしら本質があるはずでした。

「オイラーの公式で正弦と余弦とつながるものですか」

「解析関数ということですか」

「そういう話ではない」

その禅問答は数週間に亘りましたが、結局その答えが見つけれず、答えを教えてもらうことができず、春光うらかなる日に草鞋（わらじ）の老足、履きなれない青い老足を脱ぎ、もともとのくたびれた草鞋で野を歩む日々に戻ったのでした。

映画「博士の愛した数式」

それは 2006 年の春だったかと思います。某校の O 先生にお会いするため、博多に宿泊していました。打ち合わせは翌日でした。その日の早い便で到着し、一人かつ時間もありません。チャンネルシティ博多で「博士の愛した数式」という映画が上映されていたので、夕方にふらりと入館してみました。

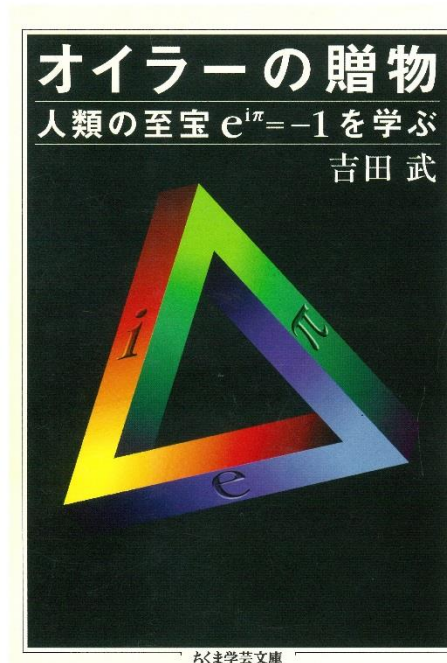
理系人らしく(?)「どんな数学的な話しが展開されるのか」という興味(汗)で、心暖まるストーリーに興味を覚えたものではありませんでした(笑)。とはいえ、その心暖まる美しいストーリーには感動しました…。そこで、

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

(1)

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2017 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0


 図 2. 吉田武; オイラーの贈物 — $e^{j\pi} = -1$ を学ぶ
 (文庫本バージョン。参考文献 [1])

という、銀幕に現れた数式は、今でも目に焼きついています。これもさきの禅問答と同じく、映画の中ではその意味はあきらかにされていません。

当然ながらこの式(1)は正しく、図1のように極座標でこの「 $e^{j\pi}$ 」の部分を表してみると、中心から実数軸（通常は横軸で X 軸）のマイナス 1 を指すこととなり、

$$e^{j\pi} = -1 \quad (2)$$

から式(1)はゼロとなるわけです。

映画のストーリーからこの式の意味を考えてみると、「博士」（寺尾聰）と家政婦の「杏子」（深津絵里）が、それぞれ第1項の「 $e^{j\pi}$ 」、第2項の「1」であり、ふたりは一緒（+）になれない（=0）というメッセージなのかなと思いました。

こんな本も買ってみたい

もともとのくたびれた草鞋だけで野を歩む日々に戻ったあとも、禅問答の答えを探していました。結局いまとってもその答えは分かりません。そんな日々の中で、図2のような本（吉田武；オイラーの贈物 — $e^{j\pi} = -1$ を学ぶ。参考文献[1]）を買ってみました。

しかしその日々は、野を「歩める」余裕もなく、くたびれた草鞋で「走り回る日々」が実際のところであり、今に及んでもこの本は読まれることもなく「本棚の肥やし（文庫本で軽いのですが…）」となっています（汗）。

電気信号はベクトルの極座標表現で表すことが多い

通常、交流電気信号は以下のように表されます。

$$s(t) = A \cos(2\pi ft) \quad (3)$$

ここでAは信号の振幅ピーク値、fは信号の周波数、tは時間です。またこれを

$$\omega = 2\pi f \quad (4)$$

として「角周波数（単位は radian/sec）」にして

$$s(t) = A \cos(\omega t) \quad (5)$$

のように表すことも多いですね。さらにこれを「ベクトルの極座標（複素数）表現」で

$$s(t) = A e^{j\omega t} \quad (6)$$

として表すことも多いです。これを「複素信号」と呼んだりします。ここで $j\omega t$ がべき（べき指数）となりますが、普通のフォントサイズで表すと

$$s(t) = A e^{j\omega t}$$

このように、べき指数の部分が小さい文字になってしまい、判読が難しくなります。そこで書籍などでは、この表現の代わりに

$$s(t) = A \exp(j\omega t) \quad (7)$$

として「exp」で表すことも多いです。

周波数ミキサによる周波数変換では

とある日、とあるところで、とある人に聞かれました。

「ミキサは周波数変換をして、引き算の成分と足し算の成分がきますよね（図3）」 「ミキサは数学的には掛け算ですよね。たとえばふたつの周波数を f_1, f_2 とすると

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A \cos(2\pi f_1 t) \\ s_2(t) &= B \cos(2\pi f_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

から積和公式で

$$\begin{aligned} s_1(t) \cdot s_2(t) &= AB \cos(2\pi f_1 t) \cdot \cos(2\pi f_2 t) \\ &= \frac{AB}{2} [\cos\{2\pi(f_1 - f_2)t\} + \cos\{2\pi(f_1 + f_2)t\}] \quad (9) \end{aligned}$$

となり、たとえば $A = B = 1$ とすれば、ミキサで周波数変換をした答えは図4のように、 f_1, f_2 の引き算の周波数と足し算の周波数に、大きさ 1/2、つまり元々の信号から -6dB となったスペクトルが現れますよね。

たしかにこれは、曇りなく／曖昧さなく、式と実動作が一致します。質問はつづきます。

極座標表現ではミキサ動作でのスペクトルが得られないぞ

「それではふたつの入力信号を極座標表現で、複素信号として表してみると

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A \exp(j2\pi f_1 t) \\ s_2(t) &= B \exp(j2\pi f_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

です。この複素信号を同じミキサに加えてみると、 $e^a \cdot e^b = e^{(a+b)}$ ですから、

$$\begin{aligned} s_1(t) \cdot s_2(t) &= AB \exp(j2\pi f_1 t) \cdot \exp(j2\pi f_2 t) \\ &= AB \exp[j(2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t)] \\ &= AB \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] \quad (11) \end{aligned}$$

となり、足し算の周波数成分しか現れないではないですか！」「そうすると、図5のようなスペクトルになるわけですね。実際の回路動作と同じじゃないですね。これはなぜでしょうか？」

一般的に回路理論では、cos で表されるものと、 $\exp(jz)$ (e^{jz}) で表されるものは同じだと説明しています。この違いなぜでしょうか。

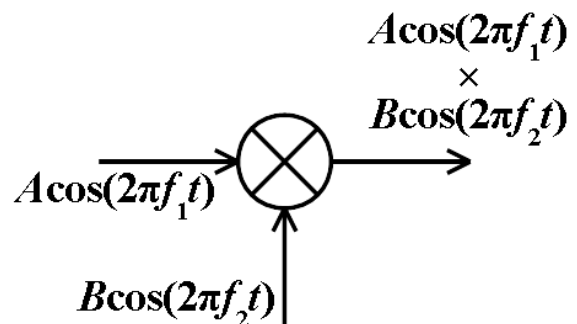


図3. 周波数ミキサの動作は乗算

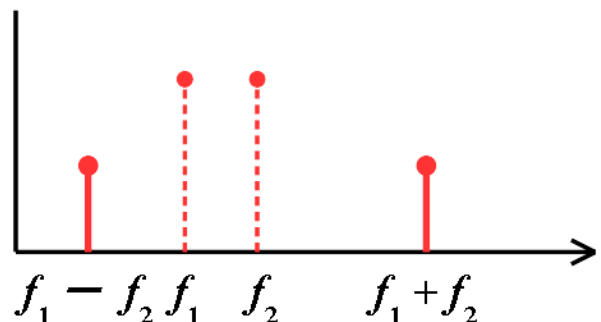


図4. 二つのコサイン波 f_1, f_2 を周波数ミキサに加えたとき得られるスペクトル

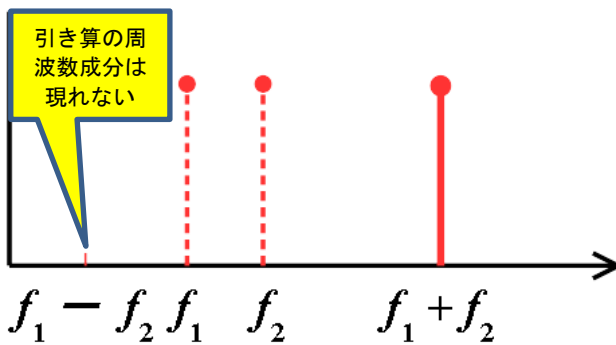


図 5. 二つの複素信号 $\exp(j2\pi f_1 t)$, $\exp(j2\pi f_2 t)$ を周波数ミキサに加えたとき得られるスペクトル

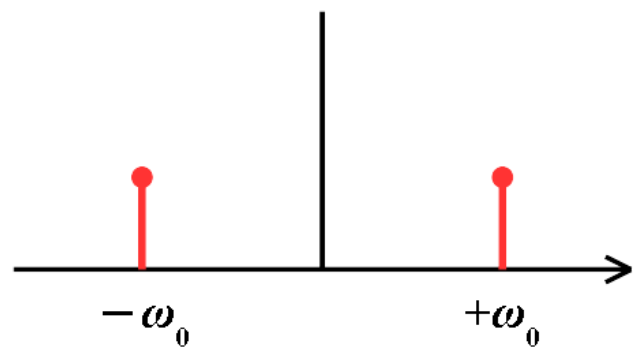


図 6. $\cos(\omega_0 t)$ はプラスとマイナスの周波数にスペクトルがある

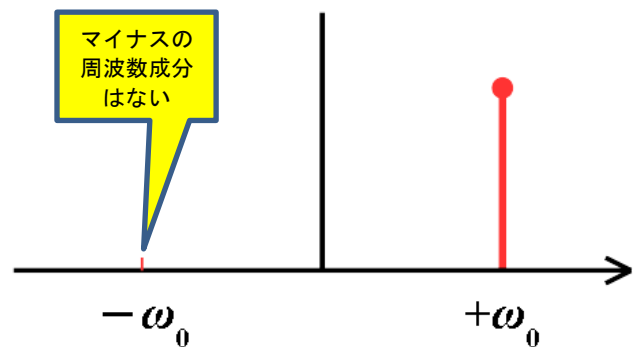


図 7. $\exp(j\omega_0 t)$ はプラスの周波数にしかスペクトルがない

複素数表現は本来の信号波形が表されていない

実は式(6)や式(10)で表される複素数表現は、本来の信号自体を現していないのです。高校のころ数学の授業でやったように、

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2} [\exp(jz) + \exp(-jz)] \\ &= \frac{1}{2} [e^{jz} + e^{-jz}] \end{aligned} \quad (12)$$

なわけで、決して

$$\cos(2\pi f t) = \exp(j2\pi f t)$$

ではないのですね…。「複素信号」と別名で呼ばれるとおりのことです。でも、なぜ同じように取り扱ってしまっているのでしょうか。

コサインは複素数表現ではプラスの周波数とマイナスの周波数がある

以降は周波数 f を角周波数 ω ($\omega = 2\pi f$) で表記していきます。

複素数表現で現実の信号（学術的な点を含むと余弦波、つまりコサインで表されることが多いので、コサインで表します）は、ここまでの議論のとおり

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)] \quad (13)$$

になります。この複素数表現を用いて、横軸を角周波数 ω とし、現実のコサイン信号 $[\cos(\omega_0 t)]$ を図示してみると、図6のようにプラスの周波数 $+\omega_0$ と、マイナスの周波数 $-\omega_0$ に周波数スペクトルが存在することになるわけです。なおこの「マイナスの周波数」については後半であらためて考えてみたいと思います。

ここで「このそれぞれのスペクトルの成分、 $\exp(j\omega_0 t)$ と、 $\exp(-j\omega_0 t)$ とは何者か？」という話しになるわけです。

これまでの自分の知見から、この $\exp(j\omega_0 t)$ についての理解は、「数式での検討に適当な関数である」というものです。このあたりを追求されると、それこそ「わかってねーな」という話しになりそうですが（汗）。また出典は記憶にありませんが、アインシュタインの相対性理論も、数学の一理論体系である「リーマン幾何学」を（この体系名も正しいか記憶がなく…）中庸な難易度レベルで適応させたもの、という話しがあります。「その適応が難解ゆえ理解が困難」とされる相対性理論でさえ「中庸」ですから、際限ない、底なしともいえる数学の深淵を示す一例ともいえるでしょう。この $\exp(j\omega_0 t)$ の「数式での検討に適当な関数」という理解も、広く深い碧い水に満たされた、数学という底なし淵では、「水面下数メートル」というレベルなのかもしれません（要は私の言い訳かも）。

「本棚の肥やし」となった参考文献 [1] も、本技術ノートを執筆するなかで、あらためてばらばらとめくってみると、オイラーの公式を説明する本質的な部分は残念ながら数ページしかありません…。

さて、それでは $\exp(j\omega_0 t)$ をスペクトルとして表してみます。

図 6 から分かることではありますが、これを図 7 として改めて表してみると、 $\exp(j\omega_0 t)$ はプラスの周波数のみに存在するスペクトルになります。

このような信号は現実世界に存在するのでしょうか？「 $\exp(j\omega_0 t)$ を時間波形で表すと、**どのように描けますか？**」と質問されるとどのように答えるのでしょうか。これは「虚数単位 ($j = \sqrt{-1}$) とは何ですか？それを日常生活での絵として描いてみると、**どのように描けますか？**」という質問とほぼ同義かもしれません。

考えてみれば「4次元空間は**どのように描けますか？**」という質問とも、ほぼ同義かもしれません。

結局は「 $\exp(j\omega_0 t)$ なんてものは現実世界では存在しない」というのが、ここの答えではないかと思っています。

ここでオイラーの公式が出てくる

オイラーの公式

ここで「オイラーの公式」が出てきます。これはよく知られているように、

$$\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) \quad (14)$$

これにより直感的に図 8 のように、横軸を実数軸、縦軸を虚数軸 ($j = \sqrt{-1}$) で表した直交座標平面としてこの式の右辺を、さらにその上に極座標平面を重ねたかたちでこの式の左辺を表すことができます。

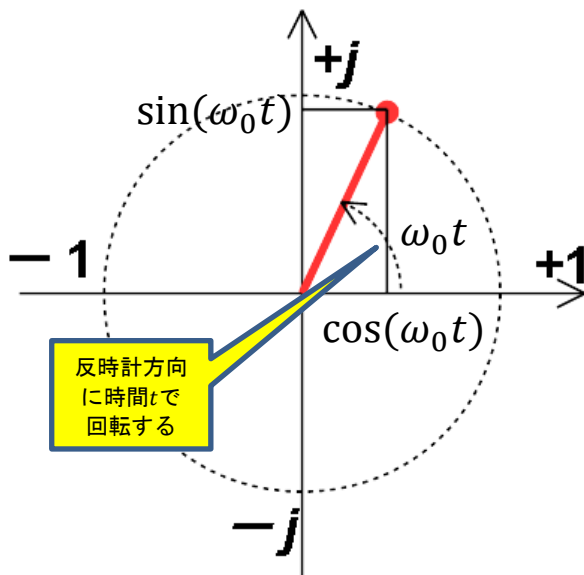


図 8. $\exp(j\omega_0 t)$ はオイラーの公式から直交平面上に重ねあわされた極座標平面として図示できる

極座標上を回転するかたちで表現できる

さらに左辺の「 $\omega_0 t$ 」の部分、図 8 の極座標上での「偏角」として表され、 $\theta = \omega_0 t$ とすれば、図中の右手方向を角度ゼロとして、そこから反時計方向に時間 t で回転するモノ（波形？）として考えることができます。さきに「以降は角周波数 ω ($\omega = 2\pi f$) で表記」と示しましたが、極座標上を反時計方向に回転していく「角速度 ω_0 」（単位は[radian/sec]）が、「角周波数 ω_0 」（これも単位は[radian/sec]）になるわけです。

回転成分は無視して位相のみで表すのが電気回路理論

波形としては時間 t の関数ですから、式(14)は角速度/角周波数 ω_0 で極座標上を回転していきますが、この波形の位相を φ （単位は[radian]）として、

$$\exp[j(\omega_0 t + \varphi)] = \cos(\omega_0 t + \varphi) + j \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (15)$$

のように表すことができます。「 φ 」という記号は何でもいいのですが、ここではこれを使ってみました。回転という視点からすれば、位相 φ というのは「回転のスタート位置」として考えることができます。

通常の電気回路理論の計算（次にその話題も考えてみますが）では、回転する成分である $\omega_0 t$ の部分は考えずに「波形間の相対的な成分」として、位相 φ のみで「偏角」として $\exp(j\varphi)$ で表します。

これが図 1 に相当するわけですね。

しかしそれこそ、いまでこそ、「アタリマエ」として使われているオイラーの公式

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (16)$$

ですが、自然対数の底である

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (17)$$

で表されるネイピア数【これは $e = 2.71828$ で「鮓、ひと鉢、ふた鉢（フナ・ヒトハチ・フタハチ）」として、鮓が金魚鉢に入っているようすで数字を覚えられます…】、と虚数単位 j 、それになんだかの実数（ここでは位相になる） φ 、これらをべき指

数にしたものが、なんで図 8 のように表せるかなんて、時空を超えた 4 次元空間的発想だとしかいえません。

つまり「アタリマエ」ではないのですよね…。ましてや「 $\varphi = \pi$ で、イコール -1」ですよ…。

ではどのように時間波形の絵として描けますか？

とはいえ、このように考えていくことで、オイラーの公式は多岐の分野への応用が広がっています。

それでも、先の「**どのように描けますか？**」のとおり、いまだに $\exp(j\omega_0 t)$ を、現実世界での時間波形の絵として表すことができません。

$\exp(j\omega_0 t)$ は、コサイン波（これは描けるもの） $\cos(\omega_0 t)$ と、それと足し算されている「サイン波 $\sin(\omega_0 t)$ に虚数単位 j が掛け合わされたもの」です。 $j \sin(\omega_0 t)$ も現実世界での時間波形の絵として描くことができません。「 j の虚数軸」を表現できないからです。

回路理論での複素数表現は本質論としては使っていないものか？

電気回路理論の計算でも $\exp(j\omega_0 t)$ やら $\exp(j\varphi)$ がよく用いられます。「極座標表現にして、最後に実数部を取ればよい」というのも良く聞く計算方法ではないかと思えます。

ここまで説明したように、現実世界の信号波形は位相 φ も含めて考えると

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (18)$$

ですが、これを電気回路理論では「複素数の極座標表記を用いて」

$$s(t) = A \exp[j(\omega_0 t + \varphi)] \quad (19)$$

と表し（置き換え）、さらに位相の部分のみを

$$s(t) = A \exp(j\varphi) \quad (20)$$

として取り出して回路計算をしていきます。これを交流回路理論では「フェーザ（Phasor）表示」といいますね。

正弦、余弦ではうまく計算できない

たとえば式(18)を電圧として

$$v(t) = V \cos(\omega_0 t) \quad (21)$$

で考えます。この電圧をコンデンサに加えると、コンデンサに流れる電流は

$$i(t) = -I \sin(\omega_0 t) = I \cos(\omega_0 t + \pi/2) \quad (22)$$

として 90 度位相が進みます。ところでオームの法則は

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (23)$$

ですが、 R を $\dot{X} = X \cos(-\pi/2)$ として（ \dot{X} の上にあるドットはベクトル相当の意味）インピーダンス角 $\varphi = -90^\circ$ をもつリアクタンスで表し、これと式(21)、式(22)とを式(23)に代入してみると

$$-I \sin(\omega_0 t) = \frac{V \cos(\omega_0 t)}{X \cos(-\pi/2)}$$

ですが、これは分母がゼロです…。これでは式として成り立ちません！ために $\dot{X} = X \sin(-\pi/2)$ を代入してみても、 $X = -1$ なので

$$-I \sin(\omega_0 t) \neq -\frac{V \cos(\omega_0 t)}{X}$$

これは…うむむ…、ですね（本質論としては、**回路の振る舞いを微分方程式として表すべき**なのですが）。

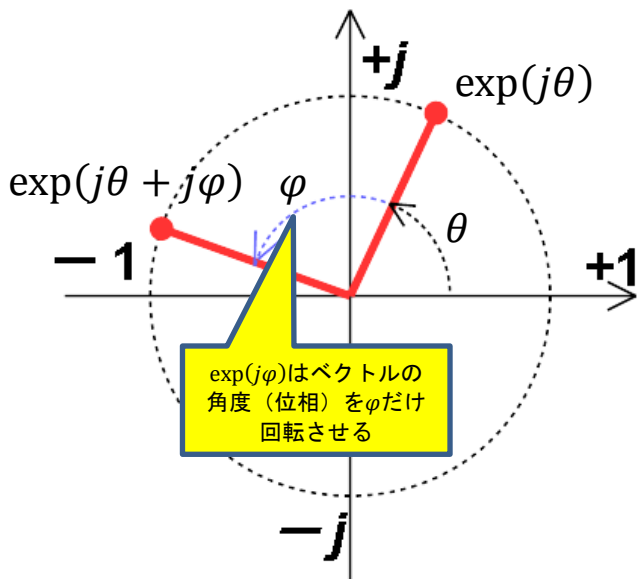


図 9. $\exp(j\varphi)$ は極座標上のベクトル・ローテータとして考える

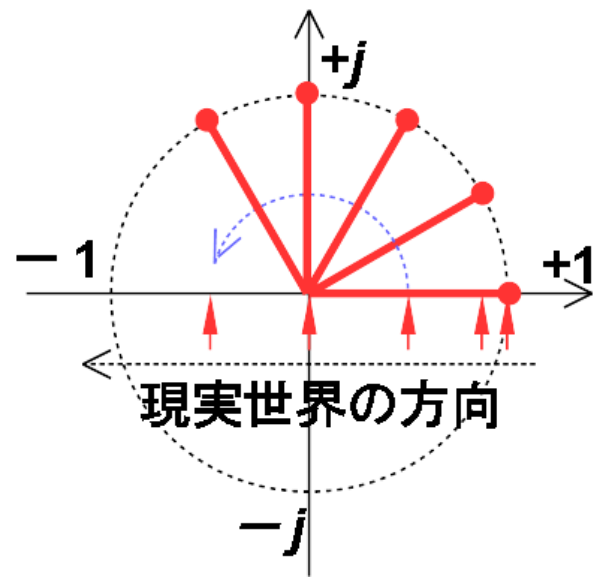


図 10. 答えである極座標上を ω_0 で回転するベクトル（複素数）を現実世界の方角から観測する

それでは…と、 R を

$$\dot{Z} = Z \cos \varphi \quad (24)$$

として（ \dot{Z} の上にあるドットもベクトル相当の意味）、インピーダンス角 φ をもつインピーダンスで表し、これと式(21)、式(22)を式(23)に代入してみると、右辺は

$$\frac{V \cos(\omega_0 t)}{Z \cos \varphi}$$

となり、この答えは一体何でしょうか！すくなくとも、 $-I \sin(\omega_0 t)$ ではありませんね。

ベクトル・ローテータとして考える

ここで式(24)を

$$\dot{Z} = Z \exp(j\varphi) \quad (25)$$

として、また信号も複素信号とすれば、式(23)以降の展開が、

$$I \exp[j(\omega_0 t - \varphi)] = \frac{V \exp(j\omega_0 t)}{Z \exp(j\varphi)} \quad (26)$$

のように、まるで何事もなかったかのように、辻褄があうことが分かります。

つまり複素数として $\exp(j\varphi)$ と記述し、これを「ベクトル・ローテータ（ベクトル回転因子。Wikipedia EN では“The rotation vector”と表記 [2]）」として図 9 のように考えれば、電圧と電流の位相関係を「数式の上」で取り扱うことができるわけですね。一応説明しておく、

$$\exp(j\theta + j\varphi) = \exp(j\theta) \times \exp(j\varphi) \quad (27)$$

$$\exp(j\theta - j\varphi) = \exp(j\theta) \div \exp(j\varphi) \quad (28)$$

$$\exp(-j\varphi) = 1 \div \exp(j\varphi) \quad (29)$$

ここで θ はもともとの角度で、 φ はここでいうところの「ベクトル・ローテータ」です。 φ により θ であった角度（偏角/位相）が回転するということです。これは高校のときに勉強した、

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad (30)$$

とまったく同じ（複素数に拡張した）ものなのですね。

つまり $\exp(j\varphi)$ は本来の回路動作を表すものではなく、数式上で便宜上、**辻褄を合わせるもの**として考えるべきもの、というところに到達することになるわけです。

つまり回路動作の本質ではないとも捉えることができるかと思えます。

少し別の見方とすると、「インピーダンスとは $\exp(j\varphi)$ で動いているのか？」というように疑問視すれば、この「辻褄合わせ」という考え方への幾らかの補強になるともいえるでしょう（実際はさきに説明した微分方程式から導くものが本筋でしょう）。

回路理論では最後に「答えの実数部をとって」とはいうが…

回路計算では、式(18)を式(20)のように置き換えて、最後に「得られた答えの実数部をとる」として、幾分乱暴なかたちで正弦波信号に相当する答えを得ます。これもアタリマエに行われている回路計算での操作ですが、これをもう少し考えてみましょう。

式(26)から得られる複素数（複素信号）での答えは、図 8 のように極座標上に表される、その極座標上を角周波数（角速度） ω_0 で回転するベクトルになります。図 10 に改めて表記したように、これを X 軸つまり実数軸、もっと簡単に言ってしまうれば我々が観測できる現実世界の方角から見たものとして、「得られた答えの実数部をとって」という表現で、正弦波信号に相当している答えを得ています。

もう少し数式をこねくりましてみよう

複素数 z の実数部をとるということは、

$$z = X + jY \quad (31)$$

の X を得るというものです。 z に対して共役複素数

$$z^* = X - jY \quad (32)$$

を用意して、それぞれを足して 1/2 すれば

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{2} [z + z^*] = X \quad (33)$$

で実数部 X が得られます。 $\mathcal{R}(z)$ は「実数をとる」という操作を表す記号としました。ここで複素数 z を複素信号として

$$\dot{i} = I \exp[j(\omega_0 t + \varphi)] \quad (34)$$

とすれば、この共役複素数は

$$\dot{i}^* = I \exp[-j(\omega_0 t + \varphi)] \quad (35)$$

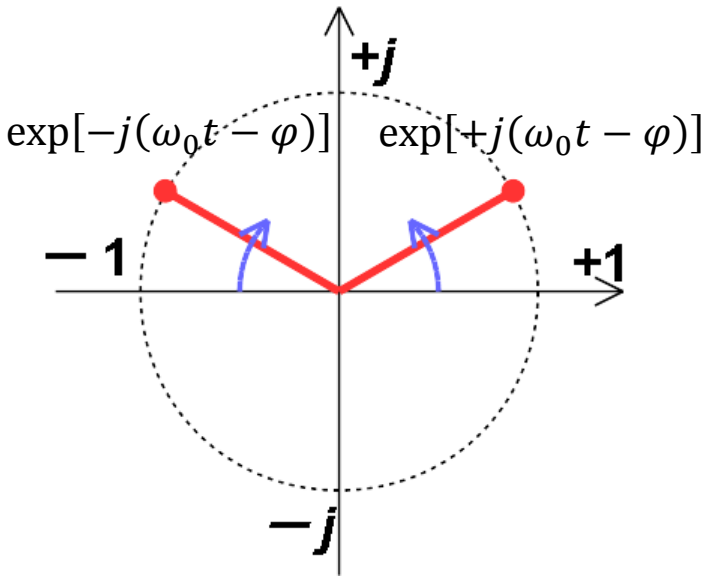


図 11. 共役複素数同士は極座標上を同じ大きさ、角周波数、位相をもって逆方向に回転するベクトル

となりますが、これらは図 10 も含めて考えると（あらためて図 11 に示しますが）、極座標上を反時計方向に回転するベクトルと時計方向に回転するベクトルを「足して 1/2」したものだと考えることができます。

共役複素数を用意するという事は、大きさ I 、角周波数 ω_0 、位相 ϕ がもともとの複素信号と同じで、回転する方向だけが「逆」な「ミラーイメージ（鏡像）」を用意するという事です。現実世界の信号波形を得るには、それぞれを「足して 1/2」すればいいことになるわけです。

結局これは、式(12)で示した

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2} [\exp(jz) + \exp(-jz)] \\ &= \frac{1}{2} [e^{jz} + e^{-jz}] \end{aligned}$$

そのものなわけですが。でも結局は同じような式を「コネクリまわしている」だけなんですけどね（笑）。

マイナスの周波数とは回転方向が違うという意味なんだ！

最初のほうで「図 6 のようにプラスの周波数 $+\omega_0$ と、マイナスの周波数 $-\omega_0$ にスペクトルが存在する」と説明しました。一般的な考えからすれば、「マイナスの周波数？」なんて、それこそ 4 次元空間のようなイメージがあり、想像ができないところではないでしょうか（そういう私も長らくそうでした）。

しかし、ここまでの議論で考えてみると、「マイナスの周波数」とは「マイナスの角周波数=マイナスの角速度」であり、複素平面上を時計方向に回転するベクトルだと考えることができます。「周波数」というからイメージがつかないだけで、「角周波数=角速度」として考えるとイメージが沸きやすいのではないかと思います。といっても、最初の話しのとおりで「複素信号 $\exp(+j\omega_0 t)$ や $\exp(-j\omega_0 t)$ とは一体ナニモノ？」については、ここまで来ても答えが出ていないわけなのですが…。

重ね合わせの理でもう少しこねくりましてみよう

もう少し回路理論に立ち戻った視点として考えてみましょう。図 12 のストーリーで考えます。ある負荷インピーダンス Z に対して、式(21)の信号

$$v(t) = V \cos(\omega_0 t)$$

が同図「上」のように加わっていることを考えます。この信号はふたつの複素信号に分けられるわけで、式(13)を活用して、

$$V \cos(\omega_0 t) = \frac{V}{2} [\exp(+j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)] \quad (36)$$

とすれば、同図「下」のように、このふたつの複素信号源（これは共役複素数になります）

$$v_1(t) = \frac{V}{2} \exp(+j\omega_0 t) \quad (37)$$

$$v_2(t) = \frac{V}{2} \exp(-j\omega_0 t) \quad (38)$$

が直列に接続されたものとしてモデル化できます。

さらにここで良く知られている「重ね合わせの理」を用いてみると、図 13 のように式(37)、式(38)の複素信号源（共役複素数）が個別に駆動するふたつの回路に分けることができます。

なお重ね合わせの理では、それぞれの回路での計算結果を足し算して本来の回路の挙動を得ます。

このように考えれば、電気回路理論で「現実世界の信号波形を複素数の極座標表記に置き換えて」計算し、計算後に「得られた答えの実数部をとって現実世界の信号波形に戻す」という操作は、式(37)と式(38)の信号源による計算結果を、「重ね合わせの理」として足し算することにより、式(36)の信号源による計算結果と同値なものが得られるのだと考えることができます。

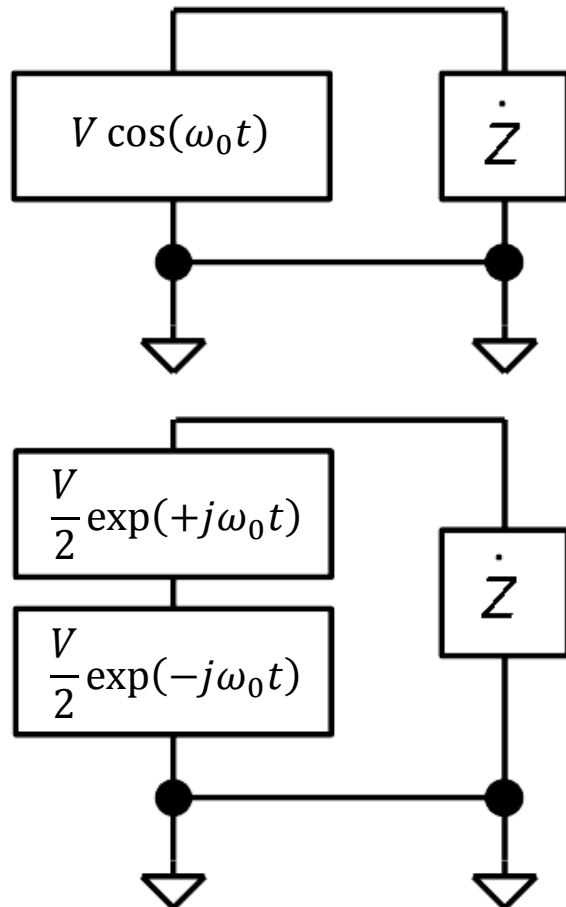


図 12. 共役複素数同士の複素信号が直列に接続されたモデル

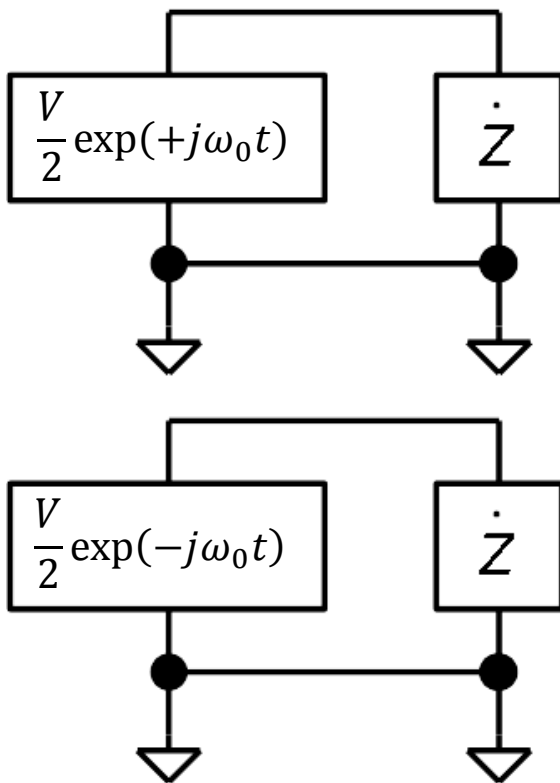


図 13.重ねあわせの理として考え直したモデル
(それぞれの応答を足して答えを得る)

それではどちらの信号（現実世界の正弦波信号か複素信号）が存在しているのか？

そうすると、またここで禅問答が始まるわけです。「それでは**本質論として**（現実世界の観測ではなく）、正弦波信号 $\cos(\omega_0 t)$ か、複素信号 $\exp(j\omega_0 t)$ の、**どちらが存在しているか？**」は、「なぜなぜ」を複数回繰り返された結果としては「すいません降参です」になるわけです…。

こんなことを考えていくと、先の「**辻褄を合わせるもの**」という定義も揺らいできてしまうのでした…（汗）。

難しいことを抜かせば+jはプラス 90° の位相回転

ここまで説明した難しい話を完全にすっ飛ばして、電子回路屋として少なくとも知っておくべき、結構重要なポイントをお話しておきましょう。それは、

「+jはプラス 90° の位相回転、-jはマイナス 90° の位相回転」

です。これを理解しておくだけで、電気回路理論の計算式の中での式展開を「だいたいようすとして」追うことができるようになります。

実務とすれば、難しいことを追い求める必要はなく、実動作としての結果が得られればいわけですから、「jをツールとして」活用すればいいだけなのです。

数学問題での「n乗根はどう計算する？」は回路屋にも関連するんだ

数学の問題で「1のn乗根は？なお1以外の答え。」というのを見ることがあります。「答えは複素数になるのだろうか」と直

感的に、また「計算は難しいのだろうか」と思われるかもしれませんが。こんな感じでしょうか。

$$x^n = 1 \tag{39}$$

で「任意のnにおいてxは？」という問題です。

電子回路屋という職業の分野では、実はこの考え方を利用して、アナログ・フィルタやデジタル・フィルタが出来ているといっても過言ではありません。実際に良く聞く名前である「**バタワース・フィルタ**」では、「1のn乗根は？」を計算することで、その素子定数（アナログ・フィルタの場合）や、タップ係数（デジタル・フィルタ）が計算されます。

ということで「数学の問題なんて」ではなくて、「**回路屋にも関係するんだ**」として、以降の考え方を理解しておくの良いと思います。

ここで出てくるオイラーの公式（極座標で）の考え方

参考文献 [1]では、式(39)の解法として、一般的ともいえる数学的方法を用いています（答えにルートが入る）。

しかしこれは、実は難しいことを考える必要はなく、ここまで説明したオイラーの公式、そして極座標の考え方を使えば、簡単に答えを得ることができます。

$$x = e^{j\varphi} = \exp(j\varphi) \tag{40}$$

と置いてみます。これまで示してきた位相 φ の記号を用いています。まあ何でもいいのですが…。そうすれば、

$$x^n = (e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi} = \exp(jn\varphi) = 1 \tag{41}$$

になります。最初の図 1 で示した話とかなり近くなります。これをあらためて図 14 として示してみます。

ここで位相 φ をn倍した位相量が、図 14 中の右手方向（角度ゼロ）となればいわけですから、

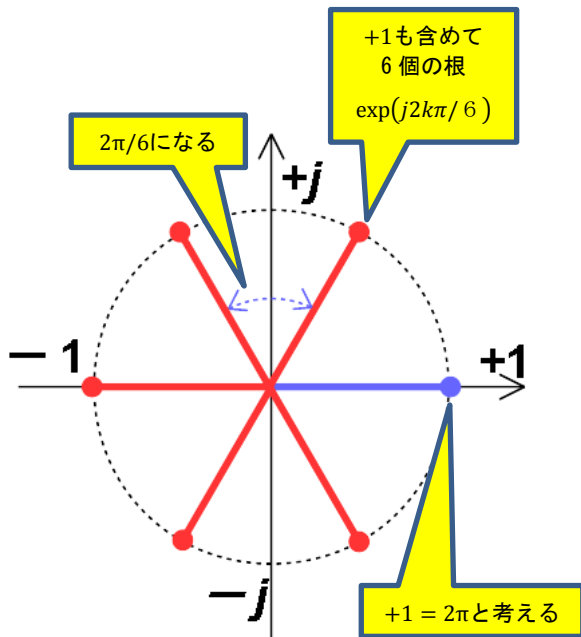
$$\varphi n = 2\pi k \tag{42}$$

となればいいのです。ここでkは任意の整数ですが、kが整数であれば $2\pi k = 0$ （右手方向/角度ゼロ）です。これにより

- ① k = 0なら、任意のnで式(42)が成立するには $\varphi = 0$ 、これは $0^\circ = [(2\pi/n) \times 0]^\circ$ つまり式(39)の解は $x = 1$ 。（「なお 1 以外の答え」という制限からは本来答えとならないぶん）
- ② k = 1なら、任意のnで式(42)が成立するには $\varphi = 2\pi/n$ 。これは $[(2\pi/n) \times 1]^\circ$ つまり式(39)の解は $x = \exp(j2\pi/n)$ 。
- ③ k = 2なら、任意のnで式(42)が成立するには $\varphi = 4\pi/n$ 。これは $[(2\pi/n) \times 2]^\circ$ つまり式(39)の解は $x = \exp(j4\pi/n)$ 。
- ④ k = 3なら、任意のnで式(42)が成立するには $\varphi = 6\pi/n$ 。これは $[(2\pi/n) \times 3]^\circ$ つまり式(39)の解は $x = \exp(j6\pi/n)$ 。
- ⑤ k = Kなら、任意のnで式(42)が成立するには $\varphi = 2K\pi/n$ 。これは $[(2\pi/n) \times K]^\circ$ つまり式(39)の解は $x = \exp(j2K\pi/n)$ 。

となり、図 14 の極座標上でn乗根の「n」の大きさを決めれば、図中の右手方向（角度ゼロ= +1）をスタートに、 $(2\pi/n)^\circ$ ステップで刻まれていく（k = 0, 1, …, ∞となる。kは負数でもかまいません。また周期性から 2 周目以降は意味を成しません）角度（極座標表現での複素数）として表すことができます。つまり式(39)の答えは、

$$x = \exp(j2k\pi/n) \tag{43}$$

図 14. $x^n = 1$ を極座標上で考える ($n = 6$ の場合)

これをオイラーの公式で一般的な複素数表現（直交座標）で表せば、

$$x = \cos(2k\pi/n) + j \sin(2k\pi/n) \quad \text{ただし } k \text{ は任意の整数}$$

という答えになるわけですね（まあ $k = 0, 1, \dots, \infty$ なので、根の数は無限ですが…）。

三部作のつづく編では

ということで、あつという間にかなりのページ数を数学ネタ、回路理論計算ネタで割いてしまいました。アメリカの数学の教授の退官講義だか執筆した書籍（これも詳細な記憶がなく…）でも、「オイラーの公式」に長大な部分を割いていたという話もあり、やはり、それだけ奥の深いものには間違いありません。

この技術ノートでも同じように、「自分が興味のある技術分野を」というか、「自分が長年の疑問である分野を」という感じで、長大な部分を割いてしまったわけでありませう。

続く中編 TNJ-033、後編 TNJ-034では、この前編での理解を用いて考えることのできる「複素ミキシング」という方式を、アナログ信号処理による「イメージ除去ミキサ」、またデジタル信号処理によるものとして超高速 ADC のデータシートの中で出会った図のスペクトルという話題に進めていきたいと思ひます。

参考文献

- [1] 吉田武; オイラーの贈物 — $e^{j\pi} = -1$ を学ぶ, 筑摩書房
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_(mathematics))（このうちの Two dimensions の部分）