ANALOG DEVICES

# TNJ-052
# アナログ電子回路技術ノート

## LTspiceでやってみるデジタル・フィルタ解析（前編）

### 平均化フィルタの周波数応答と連続信号・離散信号

著者: 石井 聡

## はじめに

これまで使っていなかったLTspice。リニアテクノロジーとの統合により、晴れて使えるようになり、学習しながら／探究しながら何とか使いつつも、最近は逆に「どうすれば変な（？）テクニックを編み出せるだろうか」などと、怪しい方向に走りつつあります（笑）。

今回の技術ノートでは、ΣΔADCで使われているsincフィルタ（***cardinal sine function filter***）がどんなもので、そしてその周波数応答特性を、どうすればLTspiceを用いてシミュレーションできるのかについて検討をしてみます。また今回編み出した怪しいLTspiceテクニック（？）もご紹介していきたいと思います。なお次回は、ΣΔADCで用いられている、「sincフィルタに見えない」sincフィルタを探究してみます。

## デジタル・フィルタの理論的考え方

デジタル・フィルタは図1のように、遅延させた離散時間ごとの各数値を演算して、入力値から出力値としての数値伝達関数で「フィルタ」を実現するものです。

この図は4タップのFIR（Finite Impulse Response; 有限インパルス応答）フィルタとよばれるものです。

すべては（たとえばADコンバータ）でサンプルされた定時間間隔ごとのサンプル数値となっています。このサンプル数値を各タップ［「タップ」とは数値取り出し位置のことを示します。水道の蛇口も英語では「タップ」と呼び、学校の校庭にある水のみ場の複数の蛇口（図2）をイメージしてもらうと良いです］ごとに、ある定数（これを「タップ係数」と呼びます）と乗算し、それらを足し合わせることによって、フィルタ出力を得るものです。

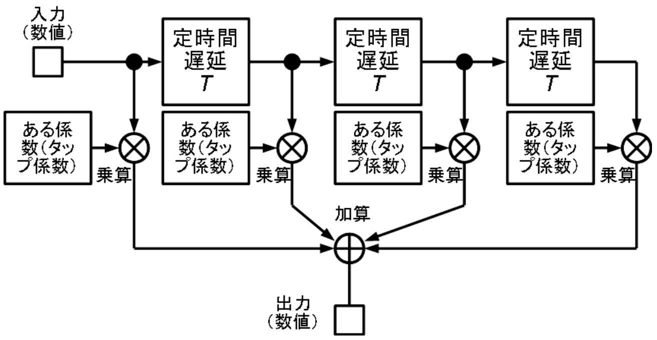


図1. デジタル・フィルタは遅延させた離散時間ごとの各数値を演算して「フィルタ」を実現するもの（4タップのFIRフィルタの例）

図2. デジタル・フィルタの各段を「タップ」と呼ぶが、タップは水道の蛇口であり、それと同じイメージとして考えることができる（写真は学校にある水のみ場の複数の蛇口）

すべて定時間間隔でということなので、この図の一番左側の1タップ目についても時間遅延ボックスの出力から出てきているものと考えることもできます。現実的にこの各段の時間遅延ボックスは、デジタル回路としてはデータがラッチされたフリップ・フロップ出力として考えることができます。ソフトウェアならメモリ上に並んでいるデータという感じでしょうか。

### FIRフィルタのタップ係数を一定にしたものが平均化フィルタ

株価の変動や企業業績を分析したりするときに「移動平均」というものを用います。これはたとえば「ある日を基準として、その日までの過去5日間（稼働日で考えました）の数値を平均化して、基準日を変えて（横軸として）グラフとし、数週間から数ヶ月オーダの変化トレンドを見る」というものです。

エンジニアらしく、これを式で書いてみると、

$$X_{AVR}(d) = 0.2 \times [x(d-5) + x(d-4) + x(d-3) + x(d-2) + x(d-1)] \quad (1)$$

と表すことができます。また和記号で表せば、

$$X_{AVR}(d) = 0.2 \times \sum_{n=1}^{5} x(d-n) \quad (2)$$

となりますが…、こんなかたちで別に難しく考えることもなく、この移動平均という操作は、図1のFIRフィルタにおいて各タ



Rev. **0**

アナログ・デバイセズ株式会社
本　　社／〒105-6891 東京都港区海岸1-16-1 ニューピア竹芝サウスタワービル
電話03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原3-5-36 新大阪トラストタワー
電話06（6350）6868

ップのタップ係数を 1 にしてあるものと全く同じです［式(1)、式(2)は「平均」ということで 0.2 倍していますが］。

つまり移動平均というものは FIR フィルタなわけです。そしてこの移動平均というものは、ここまでの説明から構成がお分かりになるとおり、平均化フィルタとなります。つまり平均化フィルタは FIR フィルタなのですね。以降は「平均化フィルタ」として説明していきます。とはいえこれが sinc フィルタなのですが…。

## LTspice で平均化フィルタの周波数応答特性を得る

LTspice を使って、この平均化フィルタの周波数応答特性をどうすれば得ることができるでしょうか。ここでは二つのアプローチを考えて行きたいと思います。なお、以降で紹介するものにタップ係数を加えるだけで、FIR フィルタや IIR（Infinite Impulse Response; 無限インパルス応答）フィルタの周波数応答特性もシミュレーションすることができます。

### 直球で B モデルの DELAY 関数を利用して計算する

LTspice には便利に使える B モデルというものがあります。これは「Arbitrary Behavioral Voltage or Current Sources」というものです。ここではいろいろな関数を定義することができて、

```
delay(x,t)
```

で信号遅延を作ることができます。ここで x はいずれかのネットの信号（電圧でも電流でも可）、t は遅延させる時間です。

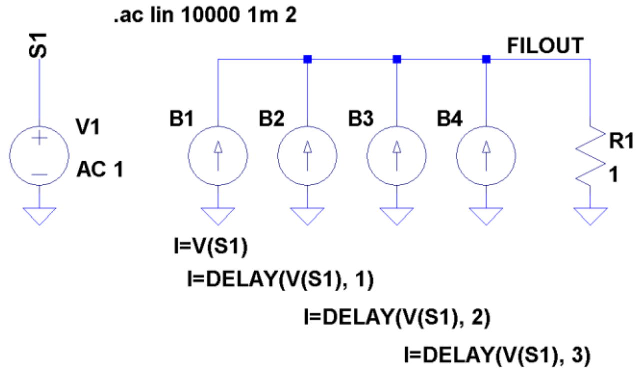


図 3. LTspice で 4 タップの平均化フィルタを構成した

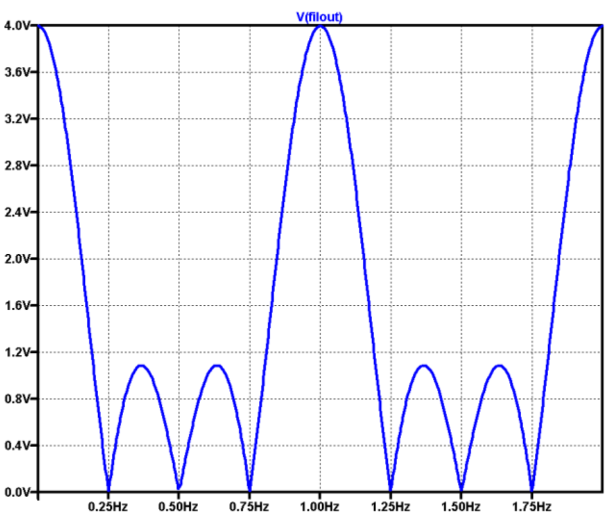


図 4. 図 3 の遅延回路の周波数応答特性のシミュレーション結果

これで 4 タップの平均化フィルタ（話しを株価に戻せば、4 日間の株価変動を移動平均したもの）を構成したものを図 3 に示します。時間を 1, 2, 3, 4 として 4 タップに相当する時間遅延をさせ、その周波数応答特性をみてみるというものです。

シミュレーション結果を図 4 に示します。おのおのの delay 関数の遅延時間（サンプリング間隔）は 1sec です。これはサンプリング周波数 1Hz に相当しますので、サンプリング定理と同じように、ナイキスト周波数 0.5Hz で折り返しが生じ、1Hz ごとにそれが繰り返されています。あとで説明していきますが、これが sinc 関数の特性になっています（より厳密には、折り返しがあるので、sinc 関数そのものではありませんが）。

### 怪しいテクニックを使って計算する（その前処理）

以降が「今回編み出した怪しい LTspice テクニック」といえるものです（笑）。こんなことを LTspice でやる人は世界中でもほとんど居ないでしょう…（汗）。

これを説明すると長くなりますので、実際の詳細計算は次の節にゆずり、ここではその計算のために必用な知識を確認しておきましょう。

図 1 で各タップ係数を 1 としたものが平均化フィルタなわけですが、この遅延は、図 3 で示した delay 関数と同じものとなります。これを Z 変換というもので、図 5 のように表すことができます。図 5 は図 3 で示した 4 タップの平均化フィルタに相当します。ここで $z^{-1}$ というものが、1 タップの遅延（図 3 とすれば 1sec の遅延）に相当します。

1 タップの遅延時間を $T$、入力信号の時間軸波形を $g(t)$ とすると、この 1 タップ遅延回路出力の時間軸波形は

$$z^{-1}g(t) = g(t-T) \qquad (3)$$

この出力の周波数スペクトルは「ラプラス変換の推移則」というもの

$$g(t-T)U(t-T) \underset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} \exp(-Ts)G(s) \qquad (4)$$

を使って、

$$z^{-1}g(t)U(t-T) \underset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} \exp(-Ts)G(s) \qquad (5)$$

として表すことができます。式(3)の右辺、式(4)の左辺は時間遅延に相当し、式(4, 5)の右辺はラプラス変換された式です。$\underset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow}$ はラプラス変換対を意味します。これら右辺の変数「$s$」は、ここでは難しいことを考えずに、角周波数 $\omega$ だとしてかまいません。式中では虚数単位 $j$ を付加して $s = j\omega$ となります（かなり乱暴な展開ですがお許しを…。入力が定常状態の信号なので $s = j\omega$ としています）。また「$U(t-T)$」はステップ関数というものですが、これはラプラス変換として有効な領域を示すだけのものなので無視すると、

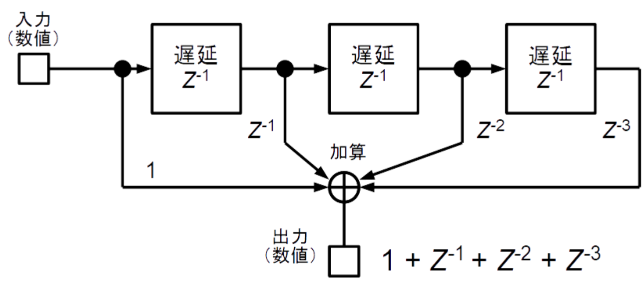


図 5.平均化フィルタを Z 変換で表してみる

- $g(t)$の周波数スペクトルが$G(s) = G(j\omega)$
- $g(t)$を$z^{-1}$倍した$z^{-1}g(t)$は、$g(t)$を$T$だけ時間遅延したもので
- この周波数（角周波数$\omega$）スペクトルは式(4)の推移則から$\exp(-jT\omega)\,G(\omega)$となり、
- もともとの信号の周波数スペクトル$G(\omega)$に対して、出力は$\exp(-jT\omega)$倍されたものになる
- つまり$z^{-1}$という時間遅延は、$\exp(-jT\omega)$という周波数応答特性をもつフィルタに相当する

図 5 の式を以下に再掲しますが、

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \tag{6}$$

上記の説明から、この FIR フィルタの周波数応答特性$H(\omega)$を得るには、この式(6)に

$$z^{-1} = \exp(-jT\omega) \tag{7}$$

として代入すればよいことになります。

ちなみにデジタル信号処理の教科書では、（正規化のため）$T = 1$として$\exp(-j\omega)$と表しています。実際の電子回路で実現するには、時間遅延はサンプリング・レートなどに影響されますので、ここではわざと式中に$T$を入れてあります。

### 怪しいテクニックを使って計算する（B モデルを使ってオイラーの公式で計算をする）

上記のことから平均化フィルタの周波数（角周波数）特性

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \quad \text{(6 再掲)}$$

は

$$H(\omega) = 1 + \exp(-jT\omega) + \exp(-j2T\omega) + \exp(-j3T\omega) \tag{8}$$

として得られることになります。ようやくこれで計算するための基本式が得られることとなりました。

しかし$\exp(-jT\omega)$は複素数です…。LTspice と少し格闘してみましたが、MATLAB などの科学技術計算ソフトと違い、複素数を直接取り扱える機能は無いようです。なお波形表示機能のほうでは複素数を一部取り扱えます。しかし今回の目的は実現できなさそうでした。

そこで以下のように分解してみました。オイラーの公式を使い、

$$\begin{aligned}\exp(-jT\omega) &= \cos(-T\omega) + j\sin(-T\omega) \\ &= \cos(T\omega) - j\sin(T\omega)\end{aligned} \tag{9}$$

このようにすると$H(\omega)$は

$$H_{REAL}(\omega) = 1 + \cos(T\omega) + \cos(2T\omega) + \cos(3T\omega) \tag{10}$$

$$H_{IMAG}(\omega) = -\sin(T\omega) - \sin(2T\omega) - \sin(3T\omega) \tag{11}$$

と分解でき、さらに

$$H(\omega) = \sqrt{H_{REAL}^2(\omega) + H_{IMAG}^2(\omega)} \tag{12}$$

として考えることで、LTspice で複素数を直接扱うことなく計算できそうなところまでたどり着きました。

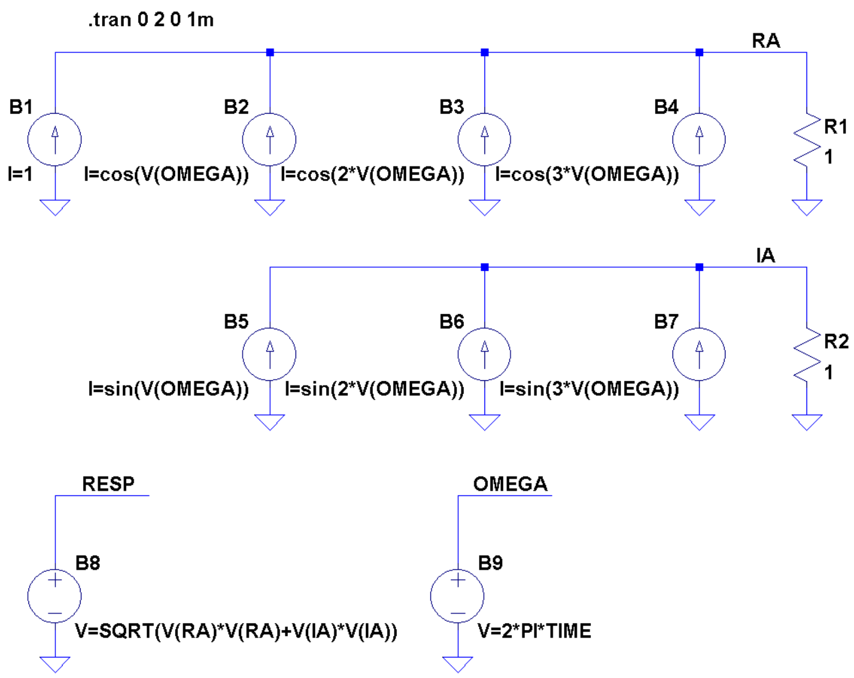


図 6. B モデルを使ってオイラーの公式で計算をする怪しいテクニックによるシミュレーション回路

### 「B モデル＋オイラーの公式」シミュレーション回路の動作

この考え方を用いて、図 3 の 4 タップの平均化フィルタ回路に相当する回路を構成したものを図 6 に示します。このシミュレーション回路について説明しておきましょう。

まず図 5 での遅延時間（サンプリング間隔に相当します）は、$T$ = 1sec です。サンプリング周波数は 1Hz になります。そこで 2Hz までシミュレーションできるようにしてあります。

「2Hz」とはいえ、シミュレーションは 2 sec のトランジェント・シミュレーションです。つまり時間軸です。ここにまず注目してみてください。

シミュレーションの結果として、周波数応答特性がシミュレーションできればいいわけですから、周波数（実際は角周波数$\omega$）という変数を定義し、これをスイープ（掃引／変化）させていけばいいわけです。

そこで図 6 の信号源 B9 を、現在時間を示すパラメータ Time を用いて

```
V=2*PI*TIME
```

で角周波数$\omega$を発生させるものとしてみました。

また図6にあるように、シンボル B1～B7 の B モデルは電流出力にしてあります。それにより、$H_{REAL}(\omega), H_{IMAG}(\omega)$それぞれでタップごとの足し算に相当するぶんを、抵抗 R1, R2（1Ω）に流れ込む複数の電流源として構成することができます。

最後にシンボル B8 を使って式(12)の計算を行い、$H(\omega)$を得るようにしています。

シミュレーション結果を図 7 に示します。この結果は図 4 と同じになっていることが分かります。

## 平均化フィルタの周波数応答特性は sinc 形状になっている

図4および図7の周波数応答形状は「sinc 形状」というものになっています。ΣΔADC のデータシートでよく出てくる sinc フィルタが、これらの図での周波数応答と同じものです。

sinc フィルタの周波数応答形状は

$$\mathrm{sinc}(\omega)=\frac{\sin(\omega)}{\omega} \qquad (13)$$

という式で表されます。この形状を図 7 に重ね合わせてみましょう。この計算は LTspice の Waveform Viewer 上で Add Trace から Expression(s) to add のダイヤログに式を記載することで実現できます。

ここで LTspice の不思議なこと（？）に気が付きました。B モデルを使ってのシミュレーションでは角度の単位は radian（弧度法）になっていますが、この Waveform Viewer 上での計算式では degree（度数法）になっています…。図 6 のシミュレーションでは変数 OMEGA を定義し、これを sin/cos の変数としていましたから、間違いなく弧度法になっていました…。

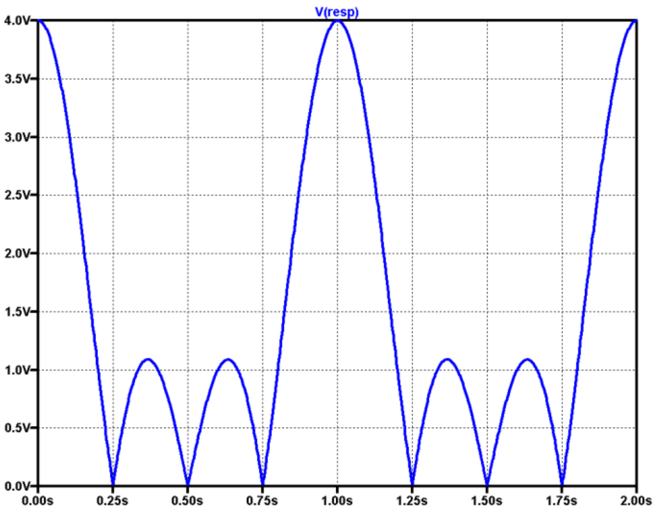


図 7. 図 6 の B モデル回路の周波数応答特性のシミュレーション結果（横軸は時間 sec になっているが、実際は周波数 Hz を表す）

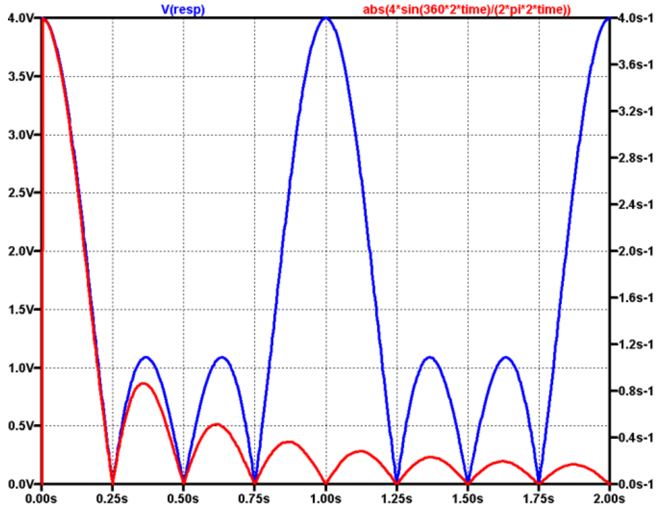


図 8. 図 7 のシミュレーション結果に sinc 形状を上書きしてみた（赤のトレースが sinc 形状。横軸は周波数 Hz を表す）

さて、ということで気を取り直して、

```
abs(4*sin(360*2*time)/(2*pi*2*time))
```

という式を設定してみます。

sinc 関数においては sin のカッコの中が 0～π radian で一山に相当します（π radian で最初のヌル点、つまりゼロになります）。図 5、式(6)相当では、time が 0～0.25sec でヌル点に到達しますので、上記のように係数 2 として 360*2*time という式にしてあります。

この計算式を図7のうえに重ね合わせたものを図8に示します。計算式が赤のプロットです。0.25Hz までは図 6 の回路のシミュレーション結果と sinc 関数の計算結果がほぼ一致していることが分かります。平均化フィルタは sinc 形状になっているのですね。

また 0.25Hz から上は、0.5Hz での折り返しにより、シミュレーション結果のほうが大きくなっていることが分かります。平均化フィルタでは離散処理が入っているために、このような結果の差異になるわけですね。

### 4 タップの平均化フィルタがサンプリング周波数の 1/4 でヌルが出ることを確認してみる

ここまで示した図 4 や図 7、図 8 のように、サンプリング間隔が 1sec だと、0.25Hz のところにヌル点（周波数応答がゼロ）が出来ています。これはどう考えればよいのでしょうか。非常に簡単な視点でみてみましょう。

図 9 は図 3 を改造した 4 タップかつサンプリング間隔 1sec の平均化フィルタです。図 3 の回路に、各タップに相当する電圧出力の B モデルを追加しています。入力には 0.25Hz の（ヌルになる周波数である）正弦波信号を加えています。

シミュレーション結果を図 10 に示します。正弦波信号は 1 周期が 4sec で、その信号が 1sec ごとに遅延されますから（1 周期を 4 ポイントでサンプリングし、1 タップごとに遅延していることと同じですから）、この 4 点をピックアップして足し算した結果は「ゼロ」です。つまりこの平均化フィルタで、確かに 0.25Hz のところにヌルができることが分かります。

この整数倍の周波数でも同じ条件（ゼロ）になりますから、図 4、図 7 や図 8 のように 0.5Hz, 0.75Hz, 1Hz…とヌルが出来ていることになるわけですね。

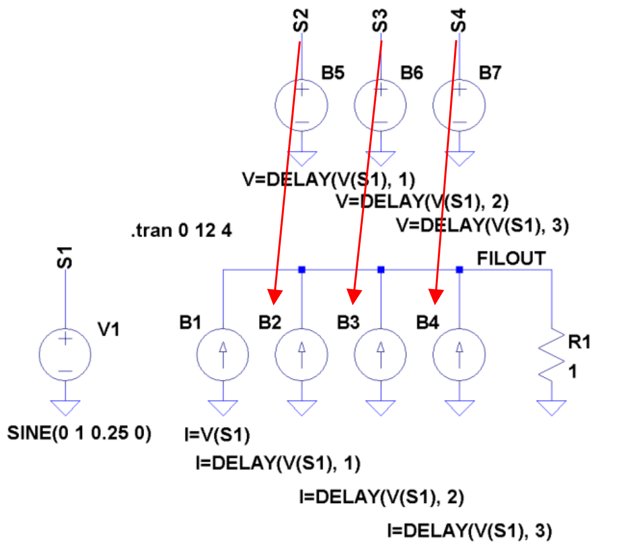


図 9. 4 タップかつサンプリング間隔 1sec の平均化フィルタが 0.25Hz でヌルになる理由を考える（シミュレーション回路）

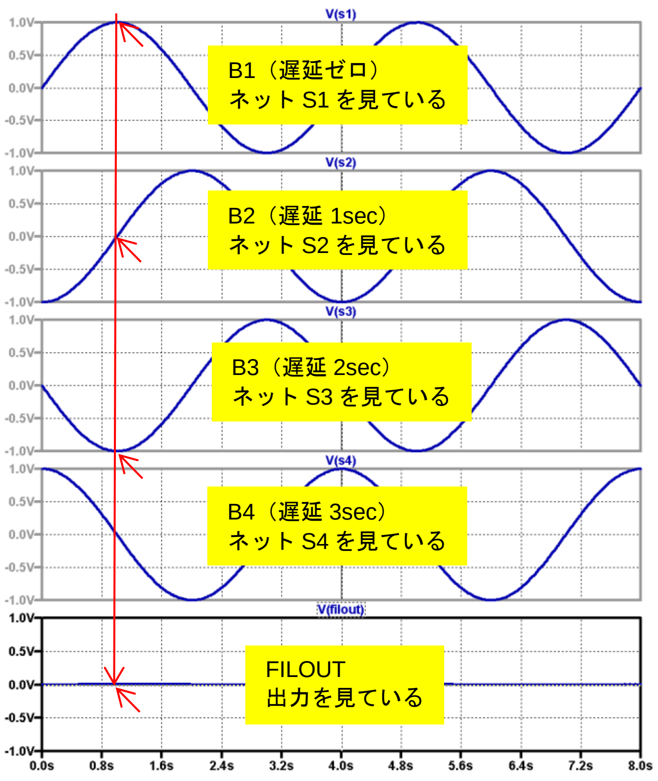


図 10. 図 9 のシミュレーション結果

## 平均化フィルタに入力される信号が連続時間信号と離散時間信号で答えがどう異なるか

ここまでのところで疑問が脳裏をよぎった方もいらっしゃるのではないでしょうか。「いや、ちょっとまてよ。図 3、図 6、図 9 では入力は連続時間信号だよな」「この技術ノートの最終目的は、デジタル・フィルタとして離散時間信号をどう取り扱うか、だよな？」「でもここまでの説明は、連続時間信号についてではないか！」

ごもっともです…。これを少し考えてみましょう。

連続時間信号（以降「アナログ信号」と呼びます）でも離散時間信号（以降「デジタル信号」と呼びます）でも平均化フィルタは同じ構成になると考えることができます。この平均化フィルタのやっていることは「遅延」ですので、以降は「遅延型平均化フィルタ」と表現することで、遅延型という用語を付記してその動作を明確にしておきましょう。

これを LTspice のシミュレーションでデモしてみます。図 9 の入力の信号源部分をインパルス波形とした、シミュレーション回路（信号源部分のみ）を図 11 に示します。

遅延型平均化フィルタに入力される信号は S1（図中右上）ですが、その信号 S1 は 0.125Hz の正弦波である信号源 V2（ネット SRC）と、1sec ごとでサンプリング・パルスを生成する信号源 V1（ネット SMP）との掛け算

V(SMP)*V(SRC)

になっています。

シミュレーション結果を図 12 に示します。波形は実時間で動いていますが、サンプリング間隔ごとで値が各タップに到来しているとみなせることが分かります。つまりデジタル・フィルタそのものの動作ということが分かります。

システムという視点では、同じ遅延型平均化フィルタに連続的な信号が加わるか、インパルス的な信号が加わるかの違いだけということなのですね。

### アナログ信号とデジタル信号のスペクトルは異なる

一方でそれぞれの入力信号を周波数スペクトルとして表してみると、図 13 のようになります。連続時間であるアナログ信号ならば、本来のアナログ信号としての周波数$f_A$だけにしかスペクトルはありません。一方でこの信号をサンプリング周波数$f_S$でサンプリングしたデジタル信号の場合、$f_A$は折り返されて同図のように

$$nf_S \pm f_A \quad (-\infty < n < +\infty) \tag{14}$$

に現れることになります。これはサンプリング定理の話題でよく出てくる話ですから、多くの方が理解されていることと思います。

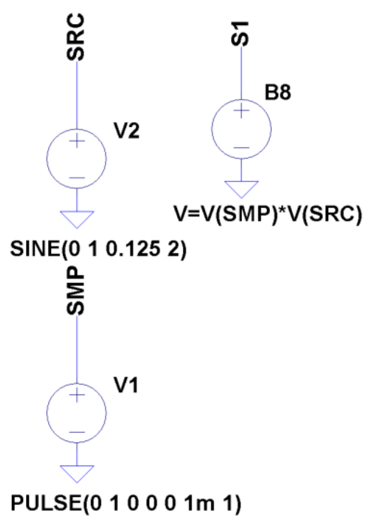


図 11. 図 9 の信号入力をインパルスとしてみた（信号源部分のみ）

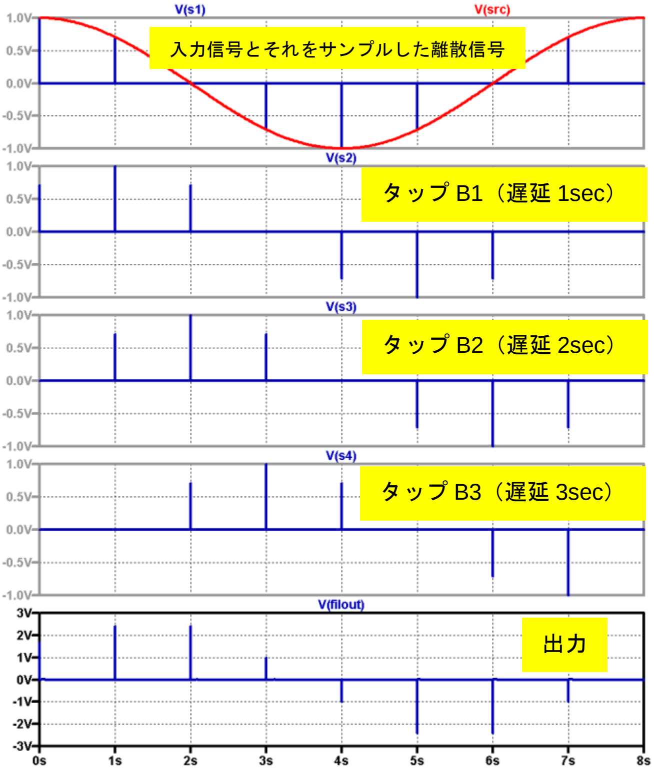


図 12. 同一構成の遅延形平均化フィルタに離散時間信号を入力してもデジタル・フィルタとして成立する

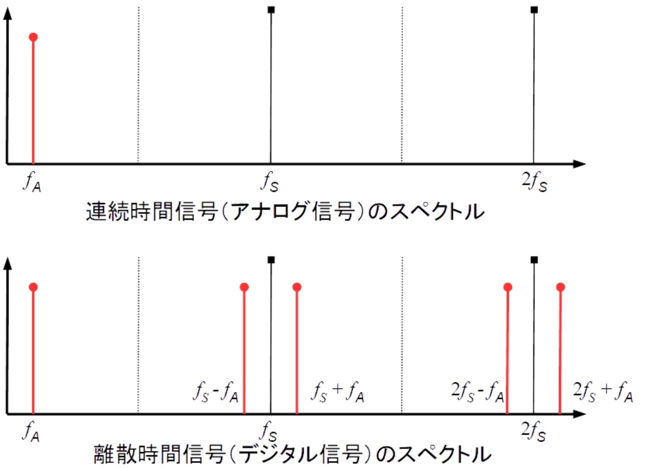


図 13. 連続時間信号（アナログ信号）と離散時間信号（デジタル信号）のスペクトル。上のアナログ信号のサンプリング周波数の軸は便宜上表記してあるだけ

### アナログ信号の場合はアナログ信号のスペクトルがフィルタ出力に現れる

図 4 や図 7 の sinc 形状の周波数応答特性をもつ遅延型平均化フィルタ（サンプリング周波数を $f_S$ = 1Hz、ヌル周波数を $f_N$ = 0.25Hz とします）に、周波数 $f_A$ = 0.1Hz の「アナログ信号」が加わったことを考えてみます。これを図 14 に示します。この遅延型平均化フィルタの周波数応答特性は図 7 のとおりです。なお図 7 の sinc 形状の周波数応答特性は、連続時間信号を加えたものと仮定してシミュレーションしたものでありました。

この sinc 形状の周波数応答特性で周波数 $f_A$ = 0.1Hz の（連続時間の）入力アナログ信号がフィルタリングされるわけですので、それが出力として周波数 $f_A$（0.1Hz）上に現れることになります。

### デジタル信号の場合もデジタル信号の折り返されたスペクトルがフィルタ出力に現れる

つづいてサンプリング周波数 $f_S$ = 1Hz でサンプリングされた周波数 $f_A$ = 0.1Hz のデジタル信号が図 4 や図 7 の特性の遅延型平均化フィルタに加わったことを考えてみます。この出力スペクトルを図 15 に示します。

遅延型平均化フィルタの動作自体はアナログ信号でも離散時間信号（デジタル信号）でも同じになります。つまり周波数特性は図 7 となります。これが離散時間信号（デジタル信号）のスペクトルをフィルタリングするわけですが、丁度遅延型平均化フィルタの特性繰り返しと、デジタル信号のスペクトルの現れる周波数繰り返しポイントが同じピッチになっています。

これは遅延型平均化フィルタの遅延時間の逆数（これまでサンプリング周波数と説明してきたもの）と信号のサンプリング周波数が等しいからです。

結局は何事もなかったように、デジタル信号での遅延型平均化フィルタ出力のスペクトルも、サンプリング周波数 $f_S$ = 1Hz を周期として繰り返されるスペクトルになるわけです。

## まとめと予告

今回は LTspice を使って平均化フィルタについて考えてみました。平均化フィルタは sinc フィルタになることがご理解いただけたかと思いますし、LTspice での怪しいテクニックも「ふーん」とご高覧いただけたものかと思います。

次回はこの理解と怪しい LTspice テクニックをツールとして、ΣΔ ADC で用いられている sinc フィルタについて考えてみます。これが実は回路構成としては「平均化フィルタ」には見えないものなのですが…、これを深く解析していきたいと思います。

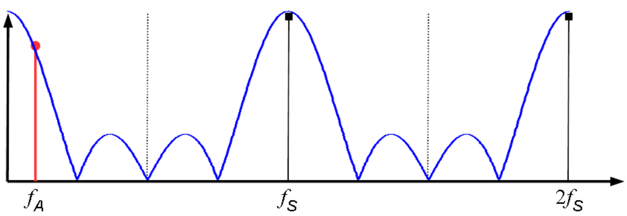


図 14. アナログ信号を遅延型平均化フィルタに通したときの出力スペクトル

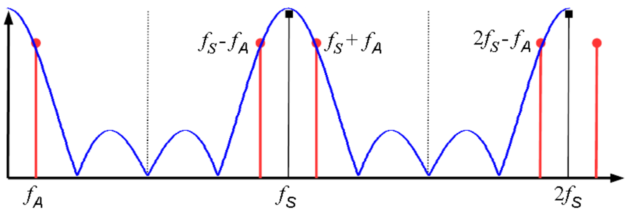


図 15. デジタル信号を遅延型平均化フィルタに通したときの出力スペクトル