ANALOG DEVICES

# TNJ-049
# アナログ電子回路技術ノート

## LTspice でアクティブ・フィルタのノイズ解析（前編）

### LTspice のノイズ・シミュレーション方法とアクティブ・フィルタのノイズ・ソースを探る

著者: 石井 聡

## はじめに

とある日、とある方と、とあるメールのやりとりをしていました。その話題は「アクティブ Low Pass Filter（LPF）のノイズ特性」についてでした。「アクティブ・フィルタには色々な方法がありますよね。代表的なものがサレン・キー型や多重帰還型ではないかと思います」「しかし改めて考えてみると、それぞれでノイズ特性はどうなるんでしょうかね」そんなメールのやりとりでした。

フィルタは余計な信号を除去するものですが、アクティブ・フィルタを構成した場合に、アクティブ・フィルタ自身からノイズ、そして周辺に使用する抵抗素子からもノイズ（サーマル・ノイズ：熱雑音）が発生し、それが結果的にフィルタ特性に影響を与えることがあります。フィルタすべきフィルタさんが、自分でノイズを出してはいけません…。

そこで LTspice を使ってそれぞれのノイズ特性について考察してみたくなりました。

## まず OP アンプ回路でのノイズ解析の考え方を示す

### OP アンプ自体のノイズ・モデル

まず OP アンプのノイズ・モデルについて説明します。OP アンプは図 1 のように非反転入力(+)と反転入力(-)の 2 入力になっていますが、

- 電圧性ノイズは、+（もしくはー)の端子に直列に接続されている電圧源としてモデル化
- 電流性ノイズは、+とーのそれぞれの端子からグラウンドに並列に接続されている電流源としてモデル化

つまりモデル化されたノイズ・ソースは 3 つあり、

1) 電圧性ノイズ
2) 非反転入力(+)に流れる電流性ノイズ
3) 反転入力(−)に流れる電流性ノイズ

になります。この 1) ～ 3)はそれぞれ「無相間」の電圧／電流の変化です。無相関とはそれぞれの信号波形形状が全く関係なく変化していることをいいます。

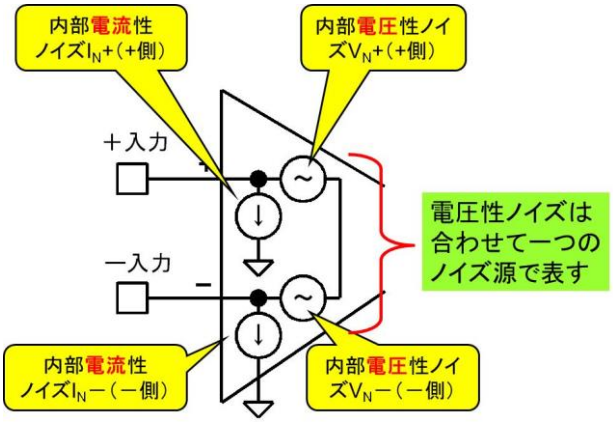


図 1. OP アンプのノイズ・モデル（TNJ-005 の図 1 再掲）

### 抵抗からはサーマル・ノイズが生じる

図 2 のように空気中に抵抗を置いておくだけで、抵抗器内で生じるブラウン運動（微粒子が温度でランダムに振動する振る舞い。運動変位量は絶対温度に比例します）により、サーマル・ノイズ（電圧）が生じます。これはジョンソン・ノイズとも呼ばれます。サーマル・ノイズ電圧は

$$V_N = \sqrt{4kTBR}$$

で表すことができます。ここで

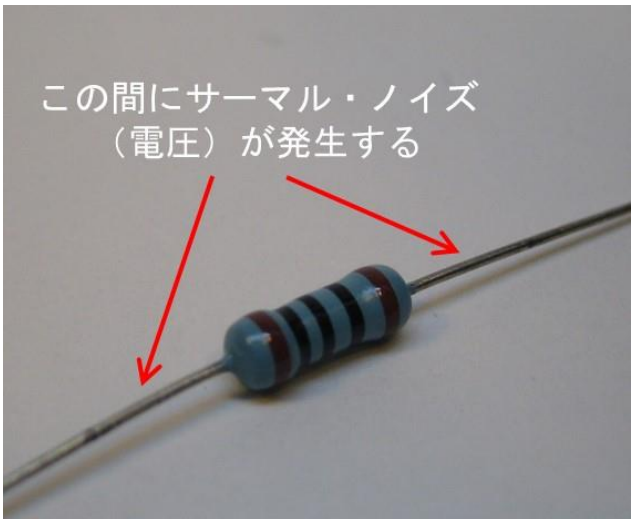


図 2. 空気中に抵抗を置いておくだけで
サーマル・ノイズが生じる

- $k$はボルツマン定数（$1.38\times10^{-23}$J/K）
- $T$は抵抗器周辺の絶対温度（27℃で 300K）
- $B$は矩形フィルタで帯域制限した帯域幅（単位は [Hz]）
- $R$は抵抗器の抵抗値（単位は [Ω]）

です。電子回路では、$B$ = 1Hz として単位帯域幅あたりの電圧密度で表すことが多く、たとえば 1kΩ の抵抗器で発生するサーマル・ノイズ電圧量は、1Hz あたりで 4.07nV/√Hz になります。

アナログ・デバイセズ株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2019 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

アナログ・デバイセズ株式会社

本　　社／〒105-6891 東京都港区海岸 1-16-1 ニューピア竹芝サウスタワービル
電話 03（5402）8200
大阪営業所／〒532-0003 大阪府大阪市淀川区宮原 3-5-36 新大阪トラストタワー
電話 06（6350）6868

ノイズ電圧実効値（全ノイズ）を得る場合は、帯域幅$B$は平方根で効きますので$B$ = 10kHz ならば、ノイズ電圧実効値は 407nV$_{RMS}$（RMS は実効値の意味）になります。

### OP アンプ回路でのノイズ・ソース 3 要素

このように OP アンプ回路「全体」におけるノイズ・ソースは

- OP アンプの電圧性ノイズ
- OP アンプの電流性ノイズ
- 抵抗のサーマル・ノイズ

となります。OP アンプの入力換算ノイズは、図 3 のように、これらの要素から

- OP アンプの電圧性ノイズは、そのまま
- OP アンプの電流性ノイズは、それぞれの入力端子に接続される抵抗に電流性ノイズが流れることで生じる電圧降下（電圧量に変換されることになります）
- 抵抗のサーマル・ノイズは、周囲の RLC 素子で分圧を受け、それで決まる OP アンプそれぞれの入力端子に生じる電圧

となり、これらを「電力の足し算, RSS; Root Sum Square」で合成したものが、**全入力換算**ノイズ量になります。

OP アンプ**出力に現れる**ノイズ量は、この入力換算ノイズ量を「ノイズ・ゲイン」倍したものとして得られます。これも図 3 に示します。ノイズ・ゲインとは**回路を非反転増幅回路として考えたときのゲイン**で、実際に回路を構成して得られる動作ゲインとは別のものです。

回路全体のノイズ・モデルとノイズ・ゲインについてより深く踏み込んでいくと、それこそ複数の技術ノートの分量となってしまいますので、ここでは簡単にその考え方のみを示しました。OP アンプのノイズ解析の考え方については、TNJ-005 でも紹介していますが、稿をあらためて詳解してみたいなとも思っております。

なおノイズ・ゲインについては、サレン・キー型 LPF でのノイズ・ゲインのシミュレーション・モデルとして、中盤の図 11 に示します。

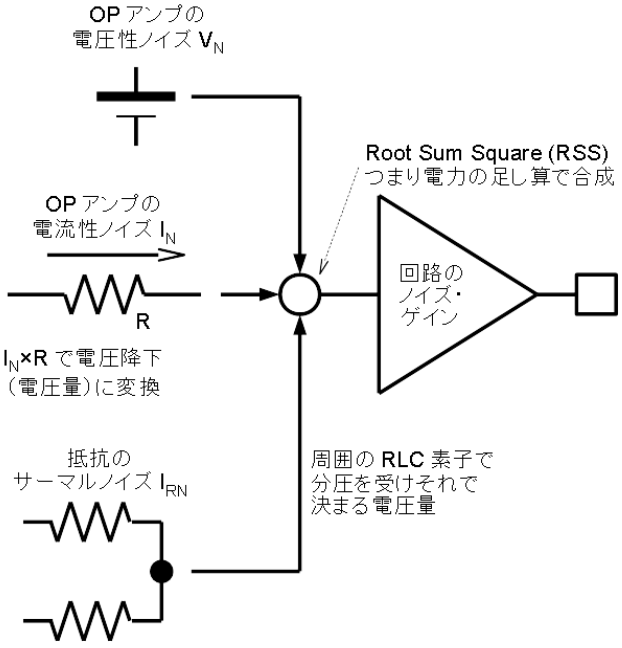


図 3. OP アンプの入力換算ノイズが
ノイズ・ゲイン倍されて出力に現れる

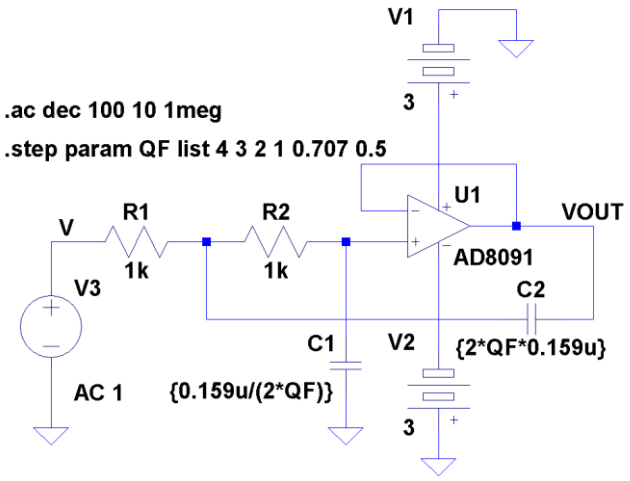


図 4. サレン・キー型 LPF（カットオフ周波数 1kHz）

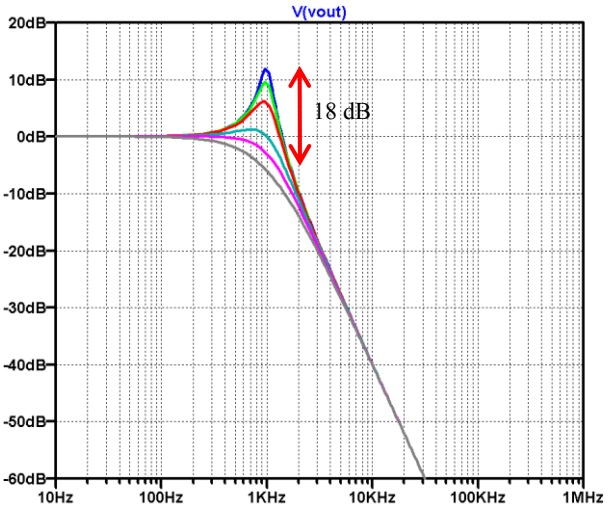


図 5. 図 4 の回路の $Q$値ごと（$Q$ = 4, 3, 2, 1, 1/√2, 0.5）による
入出力振幅伝達特性

## LTspice でノイズ特性をシミュレーションする方法

### まずは LPF としての振幅伝達特性を確認する

図 4 にサレン・キー型 LPF のフィルタ特性を確認するシミュレーション回路図を示します。カットオフ周波数$f_0$ = 1kHz、$R$ = 1kΩ、$Q$ = 4, 3, 2, 1, 1/√2, 0.5 として、LTspice の.step コマンドという、パラメータを変化させて複数回のシミュレーションを実行できる便利な機能を用いています。ここで$Q$は回路の$Q$値（Quality Factor）というものです。高次のアクティブ・フィルタ（切れのいい、という意味）では、$Q$値の異なる図 4 のフィルタ回路をカスケード（従属）に接続していき、多段フィルタとして目的の特性を実現します。この「カスケード（従属）接続」というのが、実は…、この「アクティブ・フィルタのノイズ解析」という技術ノート・シリーズでの最終ゴールともいえる話題なのでした。

図 5 に入出力振幅伝達特性に相当する、VOUT 出力を AC シミュレーションで得た結果（この LPF の伝達関数になります）を示します。$Q$ = 1/√2を超えると振幅伝送特性にピークが生じています。

### 同じ回路でノイズ特性を確認する方法は

つづいてこの図 4 の出力ノイズ密度スペクトルをシミュレーションする回路を図 6 に示します。ここでは LTspice のノイズ解析（Noise Analysis）シミュレーション方法も含めて説明します。ノイズ解析の設定画面を図 7 に示します。端子 VOUT での出力ノイズ電圧量〔SPICE で出力ノイズを表すために一般的に用いられるパラメータ記号は、onoise_spectrum です。LTspice でも V(onoise)という記号になります〕を得るため、Output のところは V(VOUT)とします。電圧量を得るために V( )という関数を入れます（電流量を得るなら I( )とします）。

また入力換算ノイズ〔SPICE で入力換算ノイズを表すために一般的に用いられるパラメータ記号は、inoise_spectrum です。LTspice でも V(inoise)という記号になります〕は、換算値として得たい位置に電圧源シンボル V（ノイズ電圧を得る場合）を配置して、そのシンボル番号を Input のところに V3 と入れます。入力換算ノイズ電流を得たいなら、電流源シンボル I を配置して Input のところにシンボル番号 I1 と入れます。3, 1 はそれぞれシンボル連番を示しています。

図 6 のシミュレーション結果を図 8、図 9 に示します。このプロットは 1Hz あたりのノイズ電圧密度の周波数特性です。入力はグラウンドにショートしたかたち（V3 を経由して）でのシミュレーションになります。図 8 では「出力ノイズ電圧密度」を、図 9 では「入力換算ノイズ電圧密度」をプロットしました。

図 8 のプロット〔出力ノイズ電圧量 V(onoise)〕を表示するには、単に VOUT をクリックするだけです。

入力換算ノイズ電圧密度〔図 9。V(inoise)〕をプロットするには、グラフ領域で右クリックすると出てくるボックスの Add Traces をクリック、出てきた選択ボックスから V(inoise)を選びます。出力ノイズ V(onoise)も同じ方法でプロットすることも可能です。

図 9 で入力換算ノイズ電圧密度が高域で上昇しているのは、LPF として入出力伝達関数（振幅伝達特性）が高域で低下するからです（LPF なのでアタリマエですが）。出力レベルをゲインで割り戻せば入力レベルが出ますから、ゲインが 0dB より小さければ入力レベルのほうが大きくなるということです。ゲインが 0dB の 10Hz では図 8 と図 9 が同じレベルになっていることからも分かります。

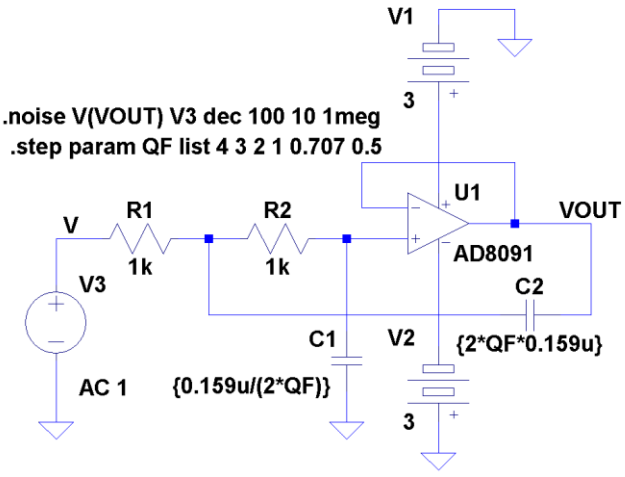


図 6. 図 4 のサレン・キー型 LPF のノイズ特性を確認するシミュレーション回路

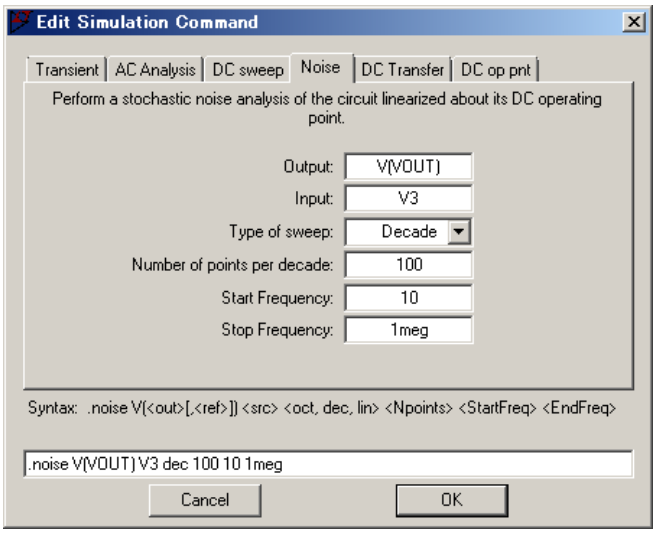


図 7. ノイズ解析の設定画面

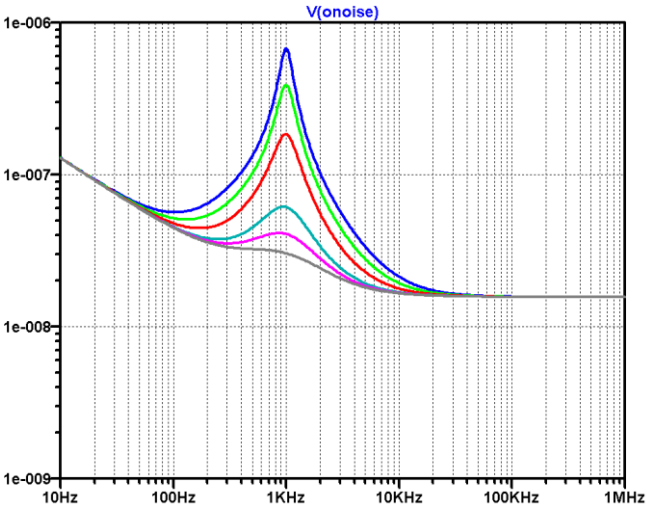


図 8. $Q$値を変えていきながらノイズ解析を行い出力ノイズ電圧密度をプロットした

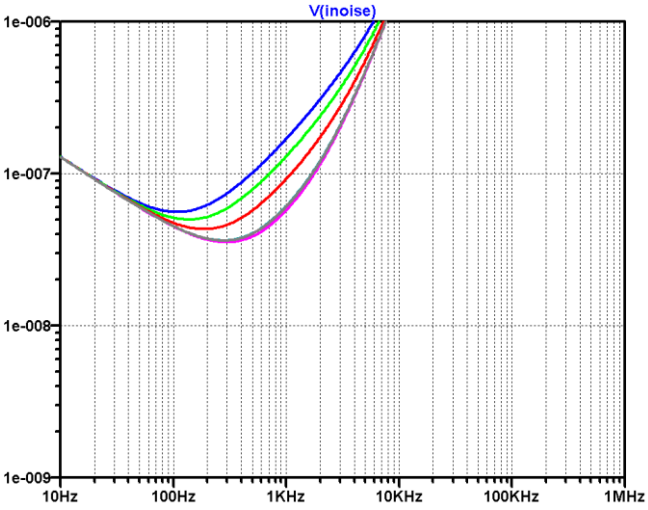


図 9. $Q$値を変えていきながらノイズ解析を行い入力換算ノイズ電圧密度をプロットした

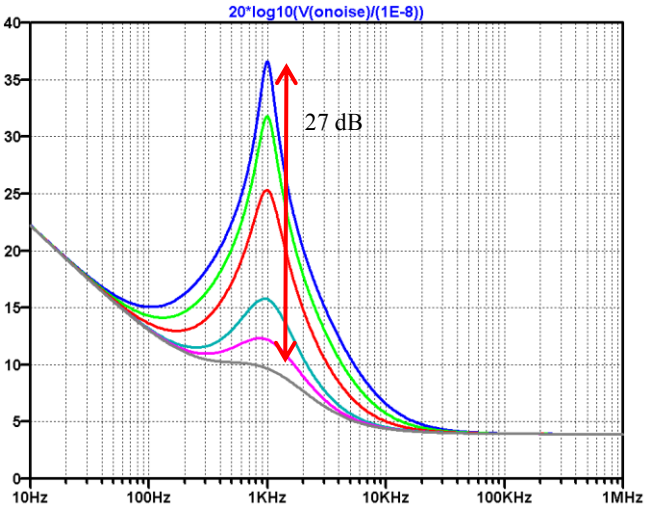


図 10. 出力ノイズ電圧密度特性を dB にしてみる

### 全ノイズ電圧実効値を確認する方法

.step コマンドを用いて*Q*値（パラメータ）を変化させて複数回のシミュレーションを行う場合には使えませんが、値を全て固定して 1 回のシミュレーション結果を得た場合には、全ノイズ電圧実効値（rms 値）を計算することができます。やりかたは、CTRL を押しながらグラフ領域の V(onoise)のラベルを左クリックします。そうすると、rms 値表示ボックスが出てきます。簡単ですね。実際はグラフの全領域を積分するという数値計算をしているだけなのですが…。

## *Q*値が変わるとノイズの変化が大きくなるのはノイズ・ゲインが変わるから

ちょっと趣向を変えて、出力ノイズ〔V(VOUT) = V(onoise)〕を 10nV/√Hz を基準として dB で表示させてみたものを図 10 に示します。計算式は

```
20*log10(V(onoise)/(1E-8))
```

というふうにしてみました。

ここまでの説明は「LTspice を用いると、こんなかたちでノイズ・シミュレーションが出来ますよ」という話しだったわけで、「じゃあ、サレン・キー型 LPF のノイズ特性は実際にどうで、その特性をどのように考えて、どのように改善すればいいのか…、は皆目分からないではないか！」と思われるでしょう。

実はこの図 10 がその答えの先駆けになるものでありました…。

### LPF の入出力振幅伝達特性と比較してみると*Q*値の変化に対してノイズ密度の変化が大きい

図 5 では*Q*値を変えて入出力振幅伝達特性をシミュレーションしてみたわけですが、信号ゲインのピーク（1kHz）のところでの、*Q*値の変化に対しての変動は、幅で 18dB 程度になっています。一方でノイズ・シミュレーションしてみた結果を dB に直した図 10 では、ノイズ密度のピーク（1kHz）のところでは、*Q*値の変化に対して何と！27dB もの幅があることが分かります！*Q*値の高いほうが出力に現れる全体のノイズが大きくなるというわけですね。

*Q*値ごとによる信号ゲイン・ピークの変化よりも、ノイズ密度のピークの変化のほうがかなり大きくなります。これは重要な事実です。以降の技術ノートでも示しますが、*Q*値の異なるサレン・キー型 LPF どうしをカスケード（従属）に接続し、高次の LPF を作るとき、「どの順番で並べていけばいいのか」の考慮の必要性を示すものなのです。

### サレン・キー型 LPF のノイズ・ゲインをシミュレーションしてみる

この技術ノートの最初のほう、また図 3 において「ノイズ・ゲイン」というものを示しました。説明においては「ノイズ・ゲインとは回路を非反転増幅回路として考えたときのゲイン」だとお話ししました。

図 10 の出力ノイズのピークはどんなところが原因になっているのかを探るべく、ノイズ・ゲインをシミュレーションしてみることで考えてみましょう。図 11 は図 4、図 6 のノイズ・ゲインをシミュレーションする回路です。信号電圧源が OP アンプの非反転入力端子に接続されています。さきの説明での「ノイズ・ゲインは非反転増幅回路として考えたときのゲイン」というものの実践がこの構成です。非反転入力端子に信号源を置き（本来の信号源は取り去り、その部分はショートします）、そしてその信号源の電圧が出力に現れる増幅率（ゲイン）をみてみるというものなのです。

もう少し話しをしておくと、「信号電圧源が非反転入力端子に接続される」というのは、見方を変えれば（また信号電圧源を直流電圧源に変更すれば）、「この電圧源は OP アンプのオフセット電圧のモデルと等価」なのだということに気がつきます。

つまりオフセット電圧が出力に現れる増幅率（ゲイン）も、ノイズ・ゲインと同じということになります。

### サレン・キー型 LPF の振幅伝達特性とノイズ・ゲインは大きく異なる

図 11 の回路でシミュレーションしてみた結果を図 12 に示します。ゲイン／ノイズ密度ピーク（1kHz）のところでは、図 10 と同じで、*Q*値の変化に対して 27dB の幅があります。つまり図 10 のノイズ密度スペクトルの上昇は、ノイズ・ゲインが上昇しているからだということが分かります。

面白い結果です…。*Q*値の変化に対して入出力振幅伝達特性では 18dB 程度の変動幅でしたが、ノイズ・ゲインは 27dB もの変動幅があるのですね。

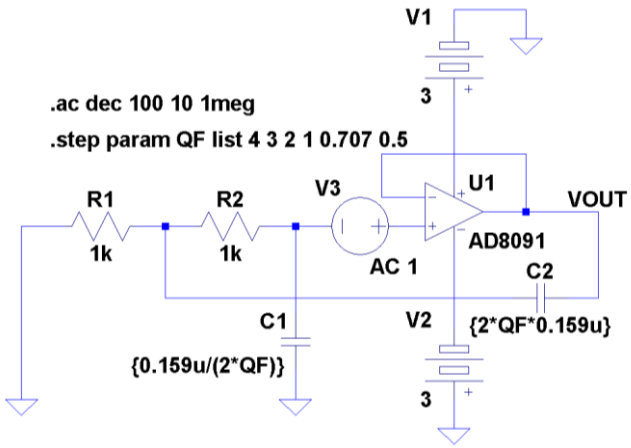


図 11. 図 4、図 6 のノイズ・ゲインをシミュレーションしてみる回路（V3 の位置に注意）

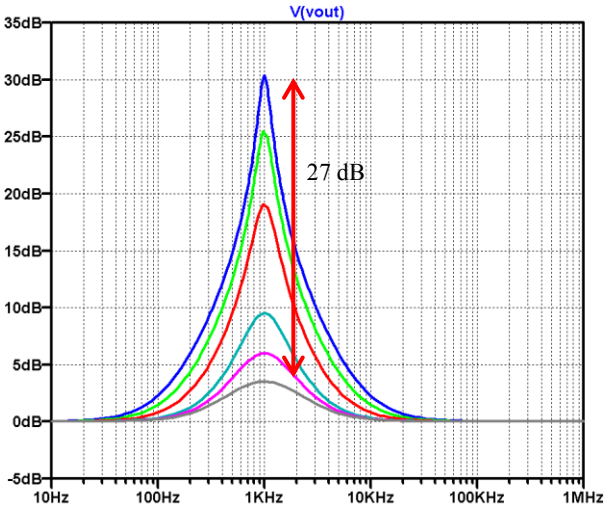


図 12. $Q$値を変えていきながら回路のノイズ・ゲインをシミュレーションしてみた

## OP アンプ回路のノイズ・ソース 3 要素の影響度を異なるシミュレーション・アプローチで考える

### ノイズ・ソース 3 要素の影響度を考える

この技術ノートの最初に、OP アンプ回路でのノイズ・ソースは 3 要素あり、

- OP アンプの電圧性ノイズ
- OP アンプの電流性ノイズ
- 抵抗のサーマル・ノイズ

だと示しました。これらそれぞれの影響度を考えていきましょう。その前に、シミュレーションで用いた OP アンプ AD8091 のノイズ特性を確認しておきましょう。データシートの図 15 と図 16 から、電圧性ノイズは 18nV/√Hz @ 1kHz、電流性ノイズは 1.8pA/√Hz @ 1kHz と読み取ることができます。データシートのスペック表のところは 10kHz での規定、また 1/$f$ ノイズのコーナ周波数も 1kHz 付近（電流性ノイズのコーナ周波数は 1kHz を超えています）なので、同データシートの図 15 と図 16 から 1kHz での値を読み取ってみました。

### OP アンプの電圧性ノイズの影響だけを見てみる

ノイズ・ソースの 3 要素のうち、電圧性ノイズの影響だけを見てみましょう。それによって、他の 2 要素の影響度を無視できるかどうかの確認ができます。

電圧性ノイズだけの影響を見るためのノイズ・シミュレーション回路を図 13 に示します。ここでは、

- 電流性ノイズで生じる電圧降下を低く抑えるため、抵抗を 1Ω にした
- カットオフ周波数を 1kHz に維持するため、コンデンサの大きさを 1000 倍した
- 低抵抗 1Ω を問題なく駆動できるようにするため、バッファとして Voltage Controlled Voltage Source E1 を追加（LTspice では Voltage Dependent Voltage Source と呼ばれる）
- 低抵抗 1Ω を使っているので抵抗からのサーマル・ノイズは無視できる

というように回路を修正してみました。シミュレーション結果を図 14 に示します。

ノイズのピークが一番大きい設定（$Q$ = 4）で、1kHz において 661nV/√Hz のノイズ密度であることが分かります。図 12（回路のノイズ・ゲインのシミュレーション）から$Q$ = 4、1kHz においてノイズ・ゲインは約 30.5dB、つまり 33.5 倍あります。データシートの値では、1kHz における電圧性ノイズは 18nV/√Hz でしたから、出力ノイズは 603nV/√Hz@ 1kHz と計算でき、図 14 のシミュレーション結果の 661nV/√Hz とほぼ近いことが分かります。

また図 8 の（3 要素が全て入った）シミュレーション結果のノイズ特性も図 15 のようにマーカで確認してみると、1kHz において 676 nV/√Hz となっています。つまり OP アンプの電圧性ノイズが支配的であることが分かりました。

これにより以降の検討では（この OP アンプと抵抗値を用いた場合には）、OP アンプの電圧性ノイズに主眼をあててみていけばよいことになります。

なお OP アンプによって電流性ノイズが大きいものもあります。また使用する抵抗値が大きいときには電流性ノイズの影響や、サーマル・ノイズが大きくなってしまいます。そのため一概に「電圧性ノイズだけを考えておけば大丈夫」というものではありません。

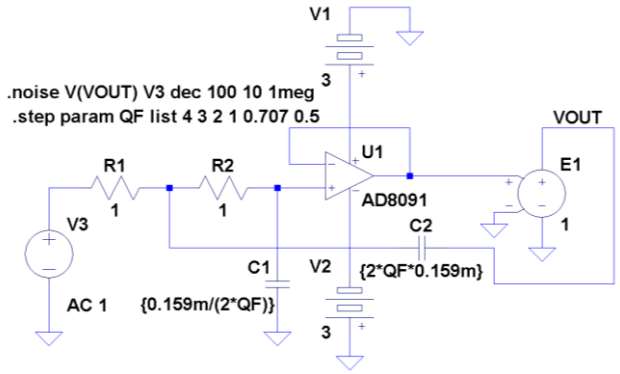


図 13. 回路の電圧性ノイズの影響のみを見られるように抵抗を 1Ω、コンデンサの大きさを 1000 倍にした

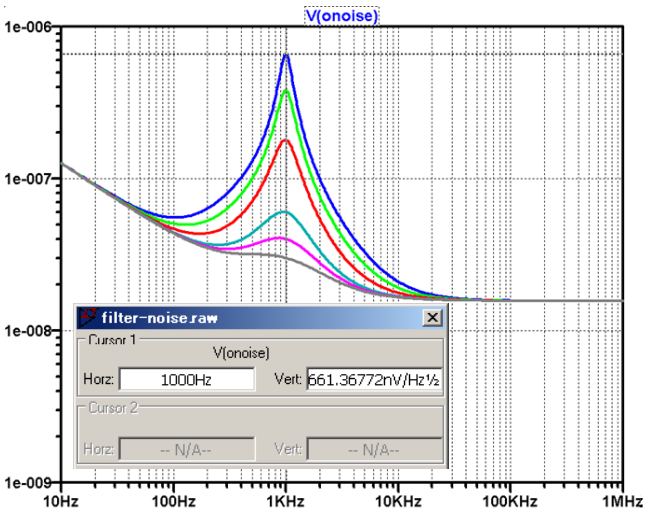


図 14 . 図 13 の回路でのノイズ・シミュレーション結果 1kHz で 661nV/√Hz になっている

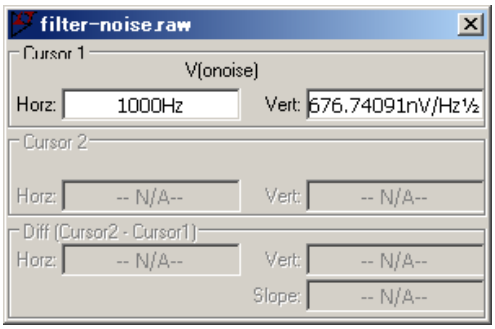


図 15 . 図 8 のシミュレーション結果も確認してみる。図 14 の結果とほぼ同じ値なので、電圧性ノイズが支配的であることが分かる

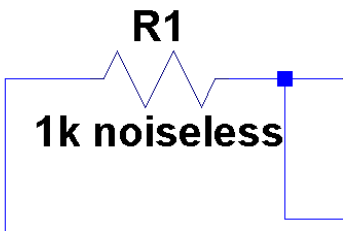


図 16. 抵抗のサーマル・ノイズの影響を排除できる LTspice のシミュレーション方法「noiseless」オプション

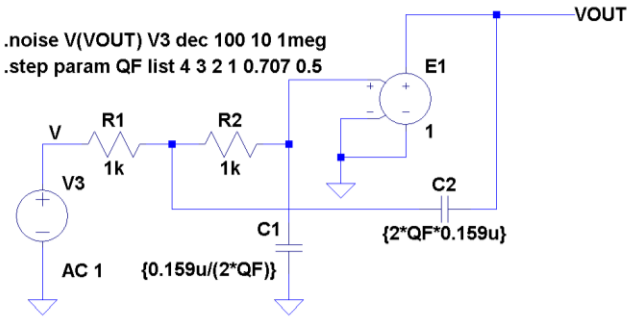


図 17. 回路の OP アンプのノイズ・ソースを除外してシミュレーションする方法。VCVS モデル（E1）を用いる

### OP アンプの電流性ノイズの影響だけを見るのは難しいが LTspice ではサーマル・ノイズの影響は排除できる

ところで SPICE シミュレーションで電流性ノイズだけの影響をシミュレーションすることは結構やっかいです（出来ないことはありませんが、設定が面倒なので…。機会があれば、別の技術ノートでご紹介したいと思います）。

それでも LTspice を用いれば、抵抗のサーマル・ノイズを排除したシミュレーションなら行うことはできます。これにより図 13 と図 14 で見てきた、「OP アンプの電圧性ノイズのみ」のシミュレーション結果に対して、「電圧性ノイズと電流性ノイズが合わさった」ノイズ・シミュレーションを行うことができます。

それを行うには、図 6 のような LTspice のシミュレーション回路で、抵抗それぞれは本来の定数のままにして、「noiseless」オプションを図 16 のように抵抗値のうしろに加えます。この方法は他のノイズ・シミュレーションでも応用できます。実はこれは LTspice のマニュアルに載っていない技なのです[2]。

このように設定すれば、図 13 や図 14 の結果に対して電流性ノイズの影響が付加された状態（抵抗のサーマル・ノイズはゼロの状態）でのシミュレーション結果を得ることができます。これらの結果を比較することで、電流性ノイズの影響度を確認できます。

### OP アンプのノイズ・ソースの影響を除外したシミュレーションには？

一方で OP アンプのノイズ・ソースを除外して、抵抗のサーマル・ノイズだけの影響を見る方法を説明します。これは図 17 のように、サレン・キー型 LPF での$A = +1$のボルテージ・フォロワに相当するモデルとして、ここでも Voltage Controlled Voltage Source; VCVS である E1（$A = +1$にして）を用意すればよいのです。

もしこのようなサレン・キー型 LPF の$A = +1$の設定ではなく、通常の OP アンプ回路に相当するものとしてノイズ・シミュレーション回路を構成したいのであれば、その OP アンプのオープン・ループ・ゲインとカットオフ周波数特性を Laplace モデルとして、この Voltage Controlled Voltage Source に式で書き込めばよいのです。

ここまでの検討で、このサレン・キー型 LPF では電圧性ノイズの影響が支配的だということが分かりましたから、この技術ノートでは、図 16 のシミュレーション結果は割愛します。

## まとめ

今回の技術ノートでは、サレン・キー型 LPF のノイズ特性を確認してみました。$Q$値が大きくなってくると、信号ゲインのピークよりも、ノイズ・ゲインのピークのほうが上昇率が高くなることが分かりました。

「$Q$値を高く設定したい場合」というのは、高次なアクティブ・フィルタ（切れのいい、という意味）を実現するため複数の OP アンプのアクティブ・フィルタ回路をカスケード（従属）に接続していくことに相当します。

そのとき本来の目的は高性能なフィルタを構築してノイズを押さえたい（フィルタしたい）にも関わらず、カスケード接続によりアクティブ・フィルタ回路自体がノイズを発生させてしまうという危険性というか、心配があるわけです。

以降の技術ノートでは、ここまで見てきたサレン・キー型 LPF と多重帰還型 LPF というものとのノイズ特性の違い、どうすればローノイズなアクティブ LPF を実現できるか、また高次なアクティブ・フィルタを実現するため、複数の OP アンプのサレン・キー型 LPF をカスケード（従属）に接続していくとき、$Q$値の異なるそれぞれのサレン・キー型 LPF をどの順番で接続していけばいいかを考えていきます。

しかし、アクティブ・フィルタのノイズ性能だなんて、書籍や Web の記事でも見かけたことがありませんでしたが、検討してみると、相当オモシロイものですね…。

## 参考文献

[1] 柳沢 健, 金光 磐; アクティブフィルタの設計, 1973 年, 株式会社産報（絶版）

[2] Undocumented LTspice, LT wiki; http://ltwiki.org/index.php5?title=Undocumented_LTspice

[3] Mike Engelherdt 著, LTspice Users Club 訳; LTspice XVII 公式和訳マニュアル, アナログウエア No.3, トランジスタ技術 2017 年 9 月号別冊付録, CQ 出版社