

### マッチング回路を「足し算」で計算できるようになれば スミス・チャートでマッチングをとる原理が分かる（中編）

著者：石井 聡

#### はじめに

実はこの一連の技術ノート（TNJ-041, TNJ-042, TNJ-043）は、お客様からの要望に基づいたものなのです…。

2015 年に実施したアナログ技術セミナーでスミス・チャートについての導入を簡単に説明しました。そこでスミス・チャートによるマッチングの説明をさらっと（プレゼンテーションの時間の都合で）行いました。

そのときのアンケートには「スミス・チャートによるマッチングについて、より詳細を知りたい」というフィードバックが多数ありました。また「スミス・チャートは難解だ」と思われている方も多数いらっしゃるようなので、今回、このようなお話をさせていただいているわけでした。

ちなみにスミス・チャートで、マッチングまで行いたいのであれば、実はスミス・チャートだけではできません。前回の TNJ-041 の最後の図 18 で示した、「イミッタンス・チャート」という、インピーダンス平面とアドミッタンス平面が両方描かれたものでないと実現できません。これは注意が必要なことで、その事実がこの一連の技術ノートのゴールでもあります。

#### マッチングはローパス回路構成とハイパス回路構成の二通りがある

図 1 の回路（TNJ-041 の図 5 再掲）で、1MHz においてマッチングをとることができ、信号源側から負荷側に最大電力が伝送できます。このようすをもう少し見てみたいと思います。

この図 1 の回路は、ハイパス・フィルタの構成になっていることが分かります。TNJ-041 の図 6 では縦軸をリニア・スケールにして電力伝達を表示させていましたが、これをログ・スケールにしてみたものが図 2 になります。

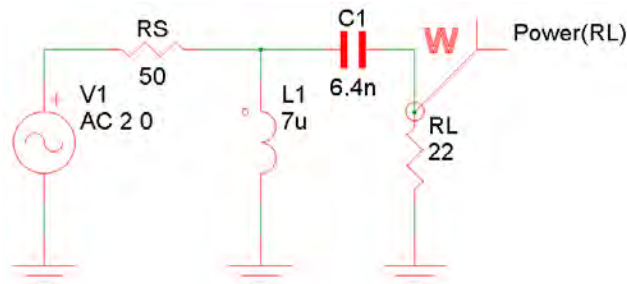


図 1. リアクタンス素子を追加してマッチングを実現できる  
（TNJ-041 の図 5 再掲）

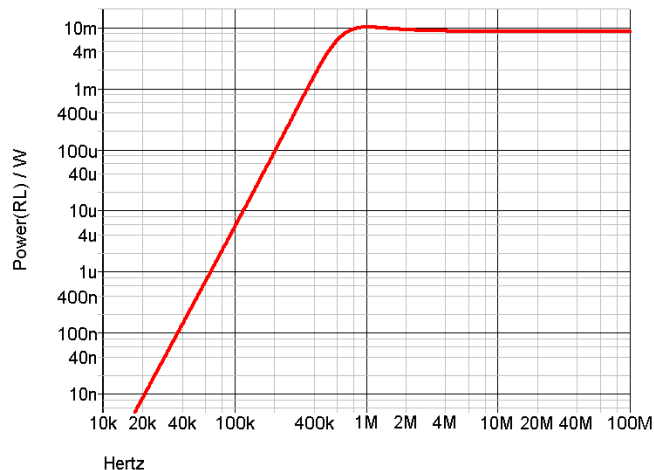


図 2. 図 1 のシミュレーション結果。1MHz でマッチングが実現できてはいるが、ハイパス・フィルタになっている

この結果をみると、12dB/Oct (40dB/Decade) になっています。この傾斜はそれぞれ LC フィルタにより形成される、2 次の LC ハイパス・フィルタそのものです。

ところで回路を組むときに信号源（もしくは前段）で生じた高調波を落としたい場合もあるでしょう。しかしこのマッチング回路ではハイパス構成になっているので、高調波を落とすローパス・フィルタの機能を実現することは当然ながらできません。

#### マッチング回路はローパス構成とハイパス構成になる

図 1 の回路以外にも、インピーダンス変換ができる回路構成を実現できます。図 3 のように並列（シャント）に接続するリアクタンスを容量にして、直列（アーム）に接続するリアクタンスをインダクタにすることもできます。

この回路によるシミュレーション結果を図 4 に示します。このような構成にすることで、ローパス・フィルタが実現できます。LC で 2 次のフィルタになりますので、3 次高調波（3MHz）で約 10dB、5 次高調波（5MHz）で約 20dB の減衰特性が得られることが分かります。これは結構便利な話です。

このように「基本的なマッチング回路は、ローパス構成とハイパス構成の 2 種類」があります。この話は次の技術ノート TNJ-043 であらためて触れてみたいと思います。

# アナログ電子回路技術ノート

TNJ-042

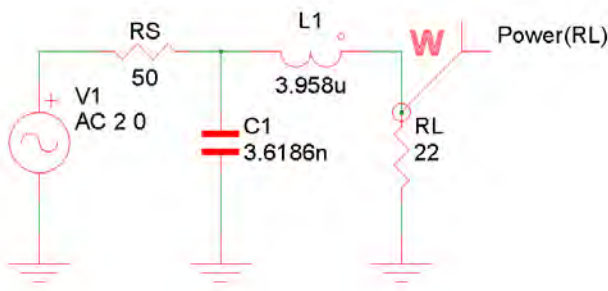


図 3. シャントのリアクタンスを容量、アームをインダクタにするとローパス構成が実現できる

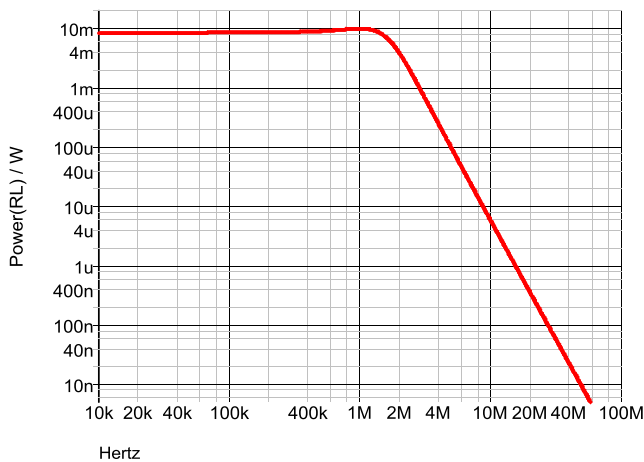


図 4. 図 3 のシミュレーション結果。1MHz でマッチングが実現でき、またローパス・フィルタが実現できている

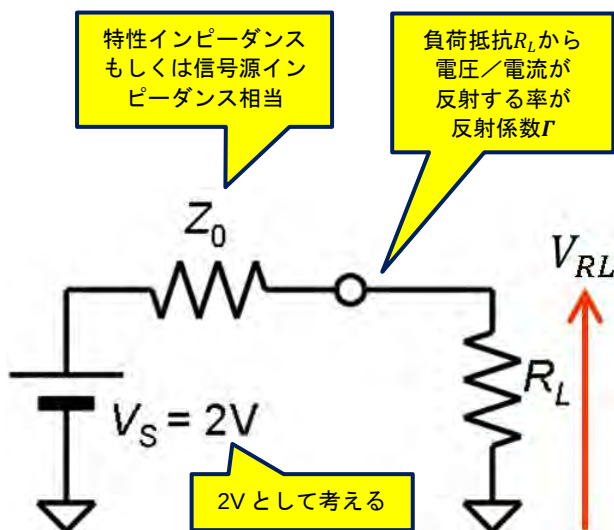


図 5. 反射係数の概念 (TNJ-039 の図 9 に加筆して再掲)

## ここでも出てくる反射係数

TNJ-039 で反射係数という概念を示しました。TNJ-039 で示した概念図を図 5 に示します。反射係数 $\Gamma$ とは、伝送線路の特性インピーダンスもしくは信号源インピーダンスを $Z_0$ としたとき、負荷端 $R_L$ で電圧 $V$ もしくは電流 $I$ が反射する率で

$$\Gamma = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \quad (1)$$

この式は「負荷端 $R_L$ 」として抵抗 $R$ であり、純抵抗 (TNJ-041 にも示しましたが「純抵抗」とはインピーダンスを考えていくうえで、電圧と電流の位相関係がゼロになる純粋な抵抗成分を指します) で表していますが、これをインピーダンス $Z_L$  (複素数) として

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{Z}_L - Z_0}{\vec{Z}_L + Z_0} \quad (2)$$

ここで「 $\rightarrow$ 」はベクトルです。そうすると、任意のインピーダンス $\vec{Z}_L$ を信号源インピーダンス $Z_0$ から観測すると、 $\vec{Z}_L$ により反射係数 $\vec{\Gamma}$ が複素数として決まることになります。「任意のインピーダンスは反射係数 $\vec{\Gamma}$ で表せる」ということです。なお $\vec{Z}_L$ は

$$\vec{Z}_L = R + jX \quad (3)$$

で複素数ですから、反射係数 $\vec{\Gamma}$ も複素数なわけです。

## インピーダンス直交座標を反射係数で表す

この関係から、インピーダンス直交座標の任意の位置は、反射係数の対応する位置として、一対一の関係で表すこと (写像) ができます。

ところで、反射係数の軸 (これを「反射係数平面」とよびます) は、本来は極座標です。本技術ノートの説明においては、最初は反射係数平面を直交座標として説明を始めていきますが、最終的には「オイラーの公式」を使って極座標に変換するというストーリーで進めます。

さて最初に少し「おまじない」をしておきましょう。ここまで伝送線路の特性インピーダンスもしくは信号源インピーダンスを $Z_0$ としておきましたが、これを基準値として以下のように反射係数の式(2)を変形します。なお以降の式では、ベクトル記号「 $\rightarrow$ 」は省略します。すべての記号は複素数として見てください。

$$\Gamma = \frac{\frac{Z_L}{Z_0} - 1}{\frac{Z_L}{Z_0} + 1} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4)$$

ここで出てきた $z$ についてですが、 $z$ も複素数で、 $Z_0$ を基準とした比率になります。これを「正規化インピーダンス」と呼びます。また

$$z = \frac{R}{Z_0} + j \frac{X}{Z_0} = r + jx \quad (5)$$

として比率 $r$ の横軸 (実数軸/純抵抗)、比率 $x$ の縦軸 (虚数軸/リアクタンス) として「インピーダンス直交座標」で表すこともできます。

正規化インピーダンス $z$ も式(2)と同じ式(4)によって、反射係数平面に変換できるわけですね。

まずここでは、反射係数平面を直交座標として考えていきましょう (示したように最終的には、オイラーの公式を使って極座標に変換します)。

# アナログ電子回路技術ノート

TNJ-042

## 反射係数平面への変換をいくつか試みる

それではまず、正規化インピーダンス  $z=+1$  ( $Z_L=50\Omega$ ) の場合をみてみましょう。これを反射係数に変換すると

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad (6)$$

これは図 6 のように変換されます。反射係数平面の中央（ゼロのところ）になります。

つづいて、 $z=0$  ( $Z_L=0\Omega$ ) の場合です。これを反射係数に変換すると

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad (7)$$

これは図 7 のように変換されます。実数軸の「マイナス 1」のところす。

さらに、 $z=\infty$  ( $Z_L=\infty\Omega$ ) の場合をみてみましょう。これを反射係数に変換すると

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{\infty-1}{\infty+1} = +1 \quad (8)$$

これは図 8 のように変換されます。無限大は+1に変換されるのですね。

つづいて虚数軸をみてみましょう。 $z=+j$  ( $Z_L=+j50\Omega$ ) の場合を反射係数に変換すると、

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{j-1}{j+1} = \frac{(j-1)(j-1)}{j^2-1} \\ &= \frac{j^2-2j+1}{-2} = +j \end{aligned} \quad (9)$$

これは図 9 のように変換されます。

「もういいだろう」という感じになってしまいますが（汗）、 $z=-j$  ( $Z_L=-j50\Omega$ ) の場合は

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{-j-1}{-j+1} = \frac{(-j-1)(-j-1)}{j^2-1} \\ &= \frac{j^2+2j+1}{-2} = -j \end{aligned} \quad (10)$$

これは図 10 のように変換されます。

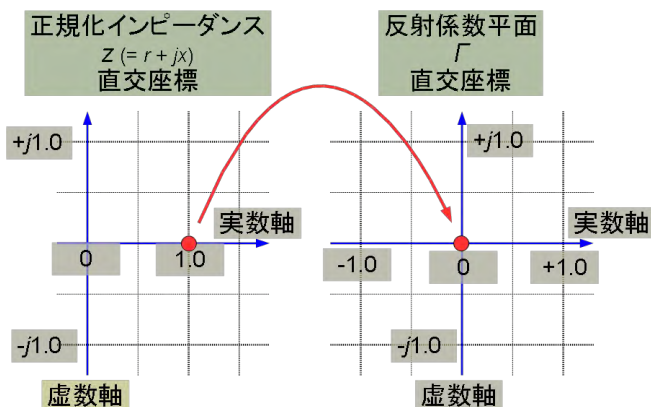


図 6.  $z=1$  を反射係数平面に変換する

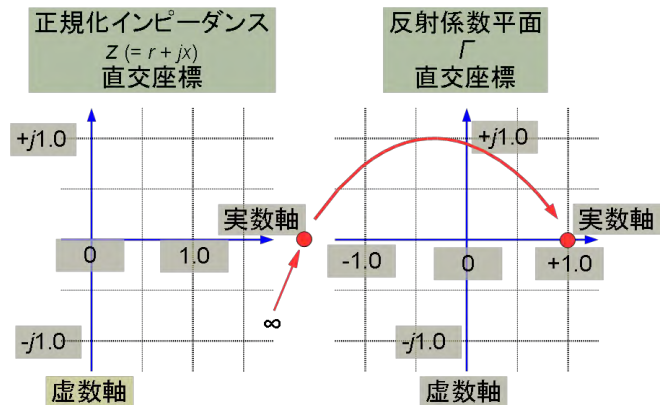


図 8.  $z=\infty$  を反射係数平面に変換する

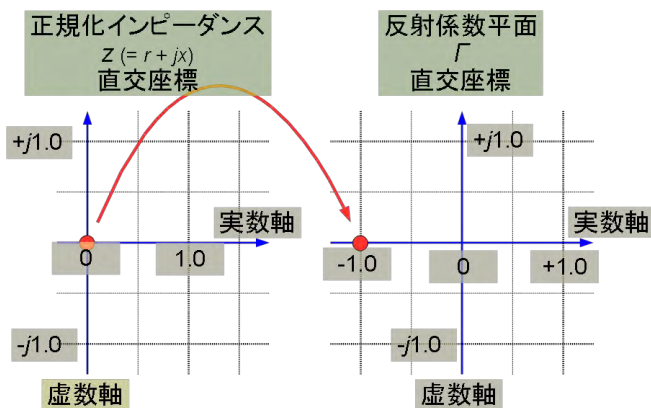


図 7.  $z=0$  を反射係数平面に変換する

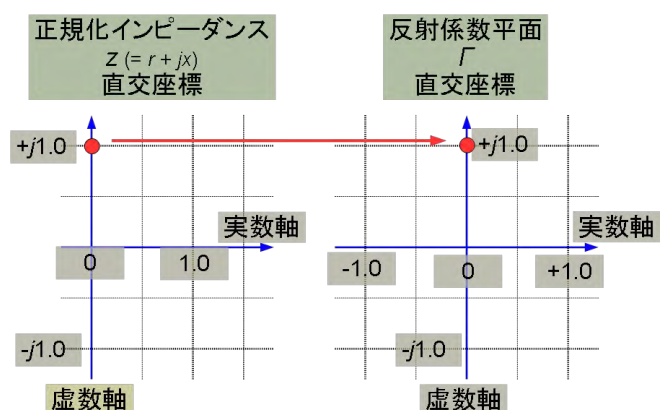


図 9.  $z=+j$  を反射係数平面に変換する

# アナログ電子回路技術ノート

TNJ-042

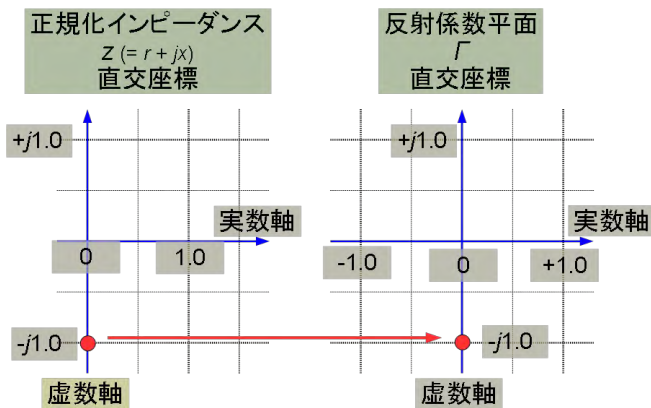


図 10.  $z = -j$  を反射係数平面に変換する

表 1. おおのの  $z$  を反射係数  $\Gamma$  に変換する

| $z$     | $Z_L$   | $\Gamma$              |
|---------|---------|-----------------------|
| 0.5     | 25      | $-0.5/1.5 = -1/3$ (①) |
| 2       | 100     | $+1/3$ (②)            |
| $+j0.5$ | $+j25$  | $-0.6 + j0.8$ (③)     |
| $+j2$   | $+j100$ | $+0.6 + j0.8$ (④)     |
| $-j0.5$ | $-j25$  | $-0.6 - j0.8$ (⑤)     |
| $-j2$   | $-j100$ | $+0.6 - j0.8$ (⑥)     |

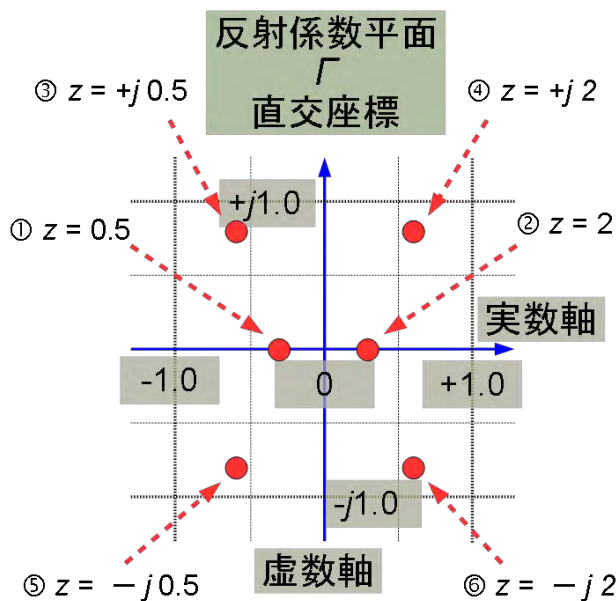


図 11. 表 1 のおおのの  $\Gamma$  を反射係数平面にプロットする

## もうすこし反射係数平面への変換を試みる

さらにもう少しいくつかの変換計算をしてみましょう。今度は表にしてみました（表 1）。これをそれぞれ反射係数平面に乗せてみたものを図 11 に示します。ゼロを中心として広がるように、それぞれ反射係数平面上に変換されていることが分かります。

ちなみに  $z$  が虚数だけの場合（表 1 の下側の 4 つ）で、この複素数の絶対値を計算してみると、どれも  $|z| = 1$  になっていますね

…。また図 7 の  $z = 0$  の場合や、図 8 の  $z = \infty$  の場合でも、 $|z| = 1$  になっています。

これまでの図 6～図 10、そして表 1 をプロットした図 11 を少し書き換えて、半径 1 の単位円も加えて表したものを図 12 と図 13 それぞれに表します。それぞれの正規化インピーダンス  $z$  が、単位円という視点からどこに変換されているかが分かりますね。

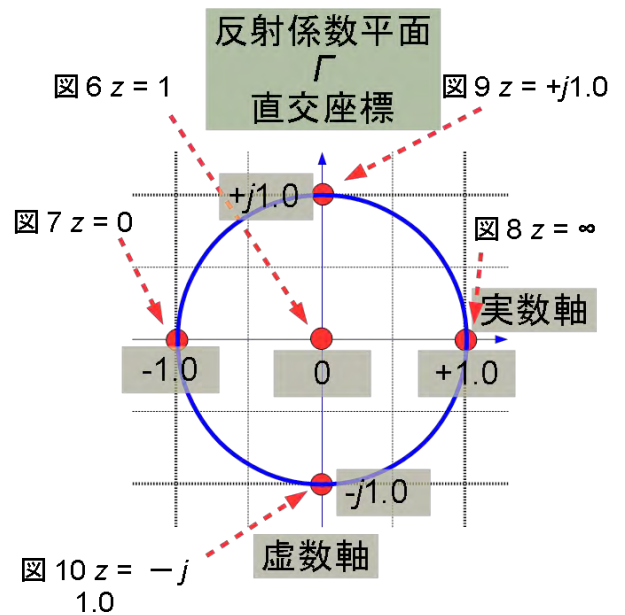


図 12. 図 6～図 10 のおおのの  $\Gamma$  を、単位円を追加した反射係数平面にプロットした

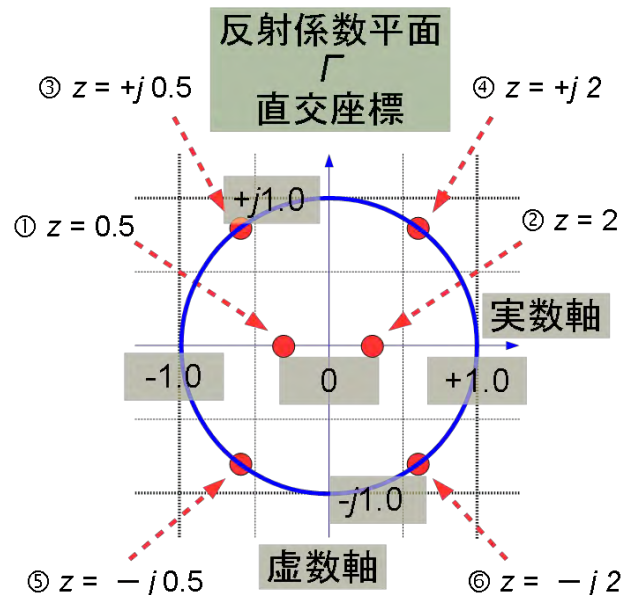


図 13. 表 1 のおおのの  $\Gamma$  を、単位円を追加した反射係数平面にプロットした



## アナログ電子回路技術ノート

TNJ-042

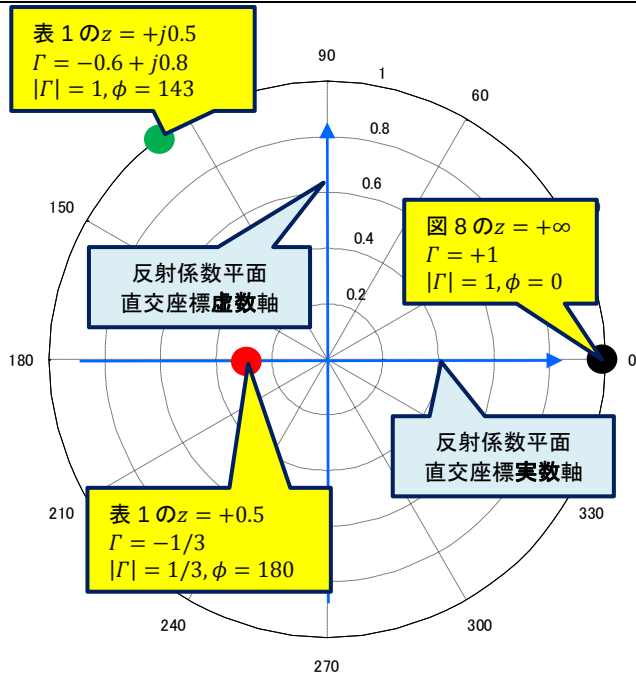


図 14. オイラーの公式で極座標平面に変換する

## ここで出てくるオイラーの公式

ということで、「どれも  $|z| = 1$  に…」ということが分かりました。ここでそれぞれに、オイラーの公式

$$|\Gamma|e^{j\phi} = |\Gamma|\cos\phi + j|\Gamma|\sin\phi \quad (11)$$

を当てはめてみれば、これまでの反射係数直交座標平面は、図 14 の極座標平面にも表せるわけです。なお図 14 の青の直線は、反射係数直交座標平面の軸を表しています。たとえば図 8 の  $z = +\infty$ 、 $\Gamma = +1$  であれば

$$|\Gamma| = 1, \phi = 0$$

として図 14 の黒色のポイントに、また表 1 の  $z = +0.5$ 、 $\Gamma = -1/3$  であれば

$$|\Gamma| = 1/3, \phi = 180^\circ$$

として図 14 の赤色のポイントに、表 1 の  $z = +j0.5$ 、 $\Gamma = -0.6 + j0.8$  であれば

$$|\Gamma| = 1, \phi = 143^\circ$$

として図 14 の緑色のポイントに、それぞれ表されるわけです。図 12、図 13 の各点と図 14 の各点は、座標軸が変わるだけであり（というよりオイラーの公式でつながっている）、その点自体は「同じ位置」になります。

## スミス・チャートは反射係数平面のうえにインピーダンス軸を引いてあるもの

ここまでの話をまとめると、

「インピーダンス直交座標上の正規化インピーダンスを反射係数で変換して、それを極座標上に表すことができる」

ということになります。ここまで示してきた正規化インピーダンス  $z$  の例を、すべて反射係数  $\Gamma$  に変換して、極座標に載せたようすを、図 15（図 6～図 10 に対応しています。図 6～図 10 は図 12 でもプロットしてあります）と、図 16（表 1 に対応しています。表 1 については図 13 でもプロットしてあります）に示します。

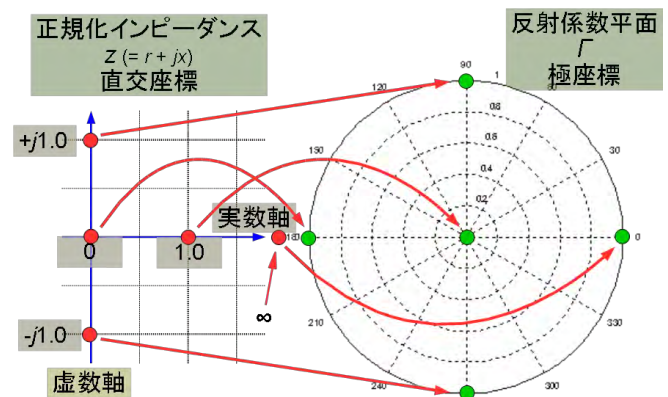


図 15. 図 6～図 10 と図 12 に対応した座標変換

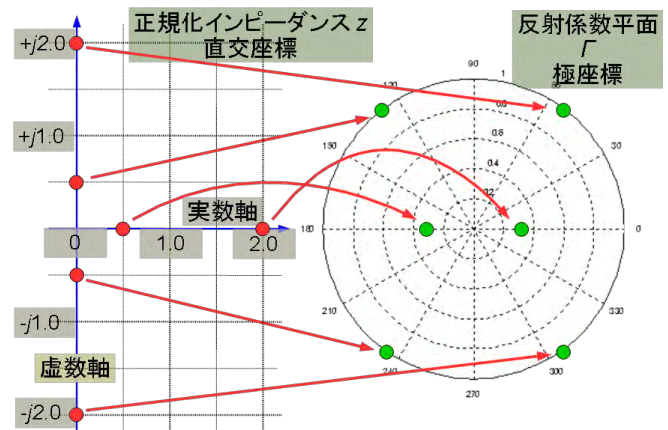


図 16. 表 1 と図 13 に対応した座標変換

## 個々のインピーダンス値ではなく直交座標軸自体を変換してみる

ここまでおこなってきた座標位置の変換は、それぞれ「1 点ごと」の座標位置の変換だったわけですが、これを一括して、

「正規化インピーダンス直交座標軸全体を反射係数で変換して、それを極座標上に表してみる」

という変換を行ったものを図 17 に示します。またこの変換のようすをアニメーション的に示したスライド（アナログ技術セミナー2015でご説明したもの）も図 18 に示します。このようにインピーダンス直交座標軸全体を反射係数で変換して、それを極座標上に表してみたものが「スミス・チャート」になります。

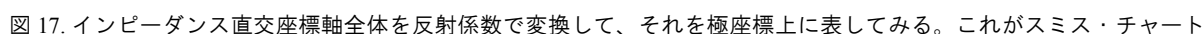


図 18. インピーダンス直交座標軸を反射係数で変換しミス・チャートになるようすをアニメーション的に示した（アナログ技術セミナー2015でのスライド）



## アナログ電子回路技術ノート

TNJ-042

## これでスミス・チャートが描けたのだが…

ここまでで分かったことは、

- 正規化インピーダンス直交座標軸全体を
- 反射係数で変換して
- それを極座標上に
- もともとの直交座標軸全体を描く
- これがスミス・チャート

ということです。ところで[1]によると、スミス・チャートは Phillip H. Smith が発明し、1930 年台から使われているとのことですが…。[2]によるとヘルツによる電磁波の実験的発見が 1888 年、また[3]によるとマルコーニによる大西洋横断無線通信の最初の成功が 1901 年…、それから 30 年から 40 年程度です。結構歴史が古いんですね…。というより 30～40 年程度でこんな概念まで電気理論が進化しているということは驚異的です。

## アドミッタンス直交座標はどうする？

長々と説明しましたが、この一連の技術ノート（TNJ-041, TNJ-042, TNJ-043）の目的は何だったのでしょうか（汗）。

あらためて最初の TNJ-041 に戻ってみると、

- リアクタンスが直並列に接続されたマッチング回路によるマッチングを、直交座標上でグラフィカルに計算したい
- 直交座標上で素子を追加するのは「足し算」
- 並列接続をアドミッタンスで考えると、アドミッタンス直交座標上であれば
- 素子を並列に追加するのに「足し算」でグラフィカルに計算できる

これにより、リアクタンスによる直並列マッチング回路で、インピーダンスとアドミッタンスを用いて、インピーダンス⇒アドミッタンス⇒インピーダンス…と逆数をとっていけば（変換していけば）、すべての計算を「足し算」でグラフィカルにおこなうことができる、という話でした。

なお正規化アドミッタンス $y$ は正規化インピーダンス $z$ の逆数で

$$y = \frac{1}{z} \quad (12)$$

しかしそこでの課題は

- 正規化インピーダンス $z$ 軸と正規化アドミッタンス $y$ 軸は別々の（逆数の関係の）軸空間
- その間を行き来するため、毎度逆数を取っていくことは面倒だ
- $z$ 軸と $y$ 軸とが一つのグラフ上に描かれていたらいいな

というところでした。

これを解決できるアイデアが、ここまで何度も出てきたスミス・チャートなのですが、しかし（残念ながら）この問題を解決するには、スミス・チャート「自体」では未だに力不足なのです…。

この問題を本当に解決できるのが、スミス・チャートを拡張した「イミッタンス・チャート」というものです（図 19. TNJ-041 の図 18 再掲）。

## アドミッタンス直交座標を反射係数平面に変換する

詳細は次の技術ノート（TNJ-043）でご説明したいと思います、正規化インピーダンス $z$ を反射係数平面にプロットした位置（反

射係数）と、その逆数をとった正規化アドミッタンス $y$ を反射係数平面にプロットした位置（反射係数）は同じになります。すなわち反射係数平面を媒介として使えば、 $z$ での表現と $y$ での表現とを同一位置としてプロットできるのです。

正規化アドミッタンス $y$ の直交座標も、反射係数の極座標上に変換すること（描くこと）ができるわけで、それとスミス・チャートを合体させたものが「イミッタンス・チャート」になります。

ここまで分かると、実はこの技術ノートの最初で示した「基本的なマッチング回路は、ローパス構成とハイパス構成の 2 種類がある」という話題も合点のいくことになります。

それぞれの話題については、次の技術ノート（TNJ-043）でご説明します。

## まとめ

よくテレビのバラエティ番組などを見ていると、「この答えはああ！」として、すぐにコマーシャルが挟まります（笑）。この技術ノートもそんな感じで展開しているつもりはないのですが、大変申し訳ないのですが、「スミス・チャート上でマッチングできるという、その答えはああ！」ということで、再度、申し訳ありませんが…、次回の（最後の）「後編」でご説明したいと思います。

## 参考文献

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Smith\\_chart](https://en.wikipedia.org/wiki/Smith_chart)  
 [2] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ハインリヒ・ヘルツ>  
 [3] <https://ja.wikipedia.org/wiki/グリエルモ・マルコーニ>

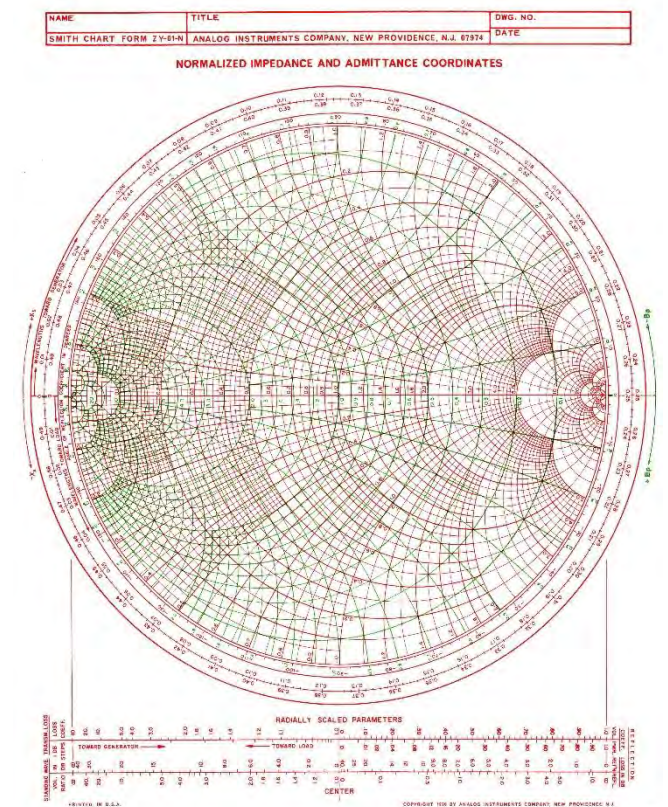


図 19. イミッタンス・チャート