

ADC や DAC の変換動作と信号演算処理 である畳み込みや掛け算との関係を考える

著者: 石井 聡

はじめに

ADC や DAC は実時間連続信号と離散信号（デジタル値）の間で変換動作がなされています。この技術ノートではその辺の理論的な考え方について説明していきます。あわせて ADC のクロック・ジッタと SNR（Signal to Noise Ratio; SN 比）の関係がどうなるのかと、DAC のクロック・ジッタと SNR の関係がどうなるのか、こんな話題も考えてみたいと思います。

さて、図 1 はデジタル信号処理の超定番の書籍、A. Oppenheim, R. Schaffer; Digital Signal Processing, Prentice Hall. です。この写真に付箋が見えますが、この本の p.26、1.7 Sampling of Continuous-Time Signals のところにしおりとして挟んでおりました。ここでは実時間信号をどのように離散信号に数学的に変換していくのが、複数の式で説明されていますが、どうも釈然としません。そんな話題を示してみたいと思います。

このネタは技術ノート TNJ-013 や TNJ-014 でも若干踏み込んで説明しています。それと関連した話題の技術ノートだと考えてください。

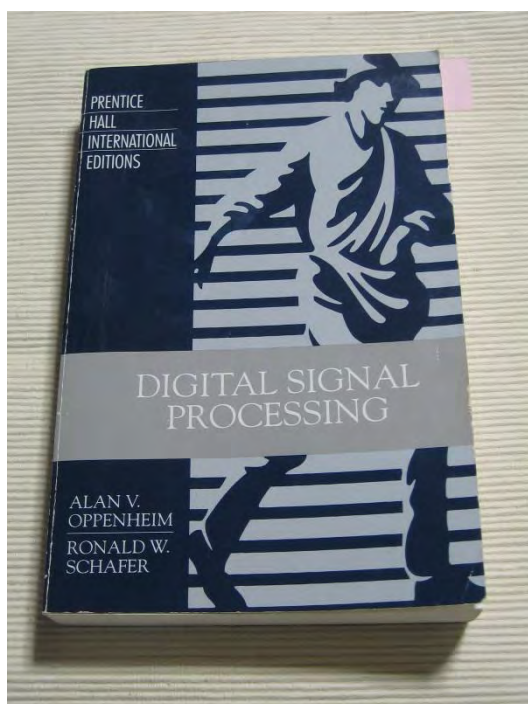


図 1. デジタル信号処理の超定番の書籍
Digital Signal Processing

ADC のサンプリングは時間軸での掛け算？畳み込み？（答えは時間軸では「掛け算」）

以前、あるエンジニアの方とのディスカッションで、図 1 の本ではない他書（邦書のデジタル信号処理の本）を参考にして、「ADC のサンプリングで得られた値というのは、時間軸でのインパルス信号列と実信号との畳み込みですね」とお話をさせていただいていました。

しかし、その方からは「時間軸では掛け算じゃないの？」というコメントをいただいたのでした。理想的な ADC のサンプリングとしては、デルタ関数 $\delta(t)$ を用いた、時間 t の変数として表される等間隔のサンプリング・インパルス列

$$sp(t) = \sum \delta(t - nT_s) \quad (1)$$

と実信号の積ではないか？（ここで T_s はサンプリング周期）というお話なのでした。この式(1)と「実信号との積」という話を、図 2 として図式化してみました。このときのディスカッションはそれで終了。その会合は散会となったのでした。

さてその日は帰りの電車でも、自分のサル知恵では「うーむ、これは分からん…」ということであり、それ以降も長い間、ずーっと考えていました。結果的には自身の辿り着いたところでは、このエンジニアの方にお詫びと訂正をしなければならいません…。

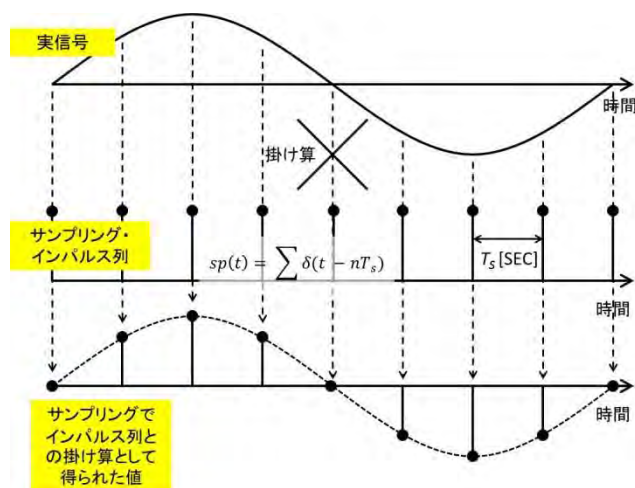


図 2. 式(1)を図式化してみる

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2015 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-015

別のエンジニアの方からのお話…ADC のサンプリングは時間軸では「掛け算」なんだ！

別のときに別のエンジニアの方とお話する機会がありました。さき話題を出したところ、その方は以下のように説明していただきました…。「AD 変換において、このサンプリング・インパルス列 $sp(t)$ のフーリエ変換対 $Sp(\omega)$ もまた、周波数軸上でのインパルス列になるんですよ」「またサンプリング動作を『時間軸で掛け算』だと考えると、ADC のサンプリング結果を周波数軸上で見てみると、元の実信号のスペクトルとサンプリング・インパルス列のスペクトル $Sp(\omega)$ との畳み込みになって、結果的にサンプリング周波数の整数倍の周波数の上下に実信号のスペクトルが見えるようになるんですよ」

なるほど…。ということでこの様子も図 3 に図式化してみました。なお畳み込みの概念については、TNJ-013 でも説明していますし、拙書の「合点！電子回路超入門」[1]でも説明しています。

その方のお話は続きました…。「こう考えるとナイキスト周波数より高い周波数の部分がオーバーラップする（折り返される）ことも綺麗に説明できますよ」

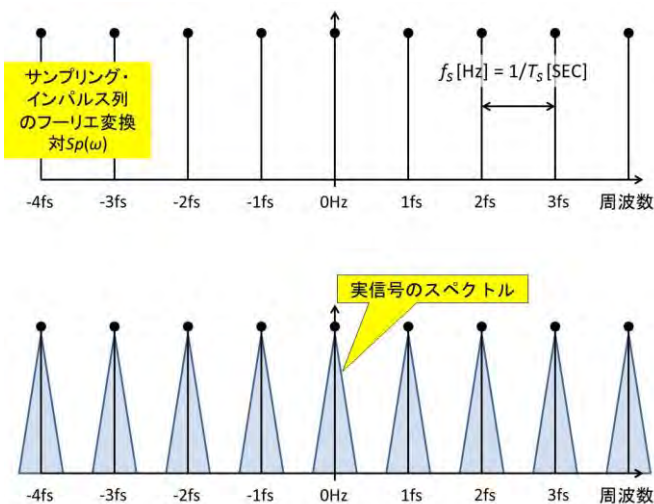


図 3. サンプリングの説明を時間軸と周波数軸で図式化してみる（実信号がサンプリング・インパルスのフーリエ対、簡単に言えばサンプリング周波数の複数倍で折り返された形で見える）

A/D 変換は時間軸では掛け算なんだ！

なるほど…。最初の話のように、私は今まで長いあいだ、「A/D 変換のサンプリング動作というのは、時間軸で畳み込み」だとばかり思っていたのです…。私が見た（これまで見たなかですが）デジタル信号処理の書籍にも、サンプリング動作を畳み込みで説明されているものがあり、それですと「畳み込みなのね」と思っていたのです。

最初のエンジニアの方とのディスカッションの中で「A/D 変換は掛け算では？」というお話をいただいていた、それから自分も「？」とかなり長いあいだ考えていたものです。ましてや、その方とのディスカッションのあとに、図 1 の本をあらためて読んでみましたが、これがまた記述が曖昧でよくわからず…。

背理的に考えてみる

最終的に別のエンジニアの方のインプットをベースに、「背理的」に考えてみました。もしサンプリング動作が時間軸で畳み込みなのだとして、それは周波数軸上では乗算になるはず

です。しかしそのような論理展開では「サンプリング周波数の整数倍の周波数の上下に」元の実信号のスペクトルが配置されることが説明できません（この背理法での説明は TNJ-014 にもう少し詳しく説明してあります）。

これにより漸く（今更）本質のところに辿りつくことが出来ました。ひとつ大きな山を越えた感じがしました。

アナログ・デバイセズのアプリケーション・ノートにも

なお A/D 変換のサンプリングが、式(1)でのサンプリング・インパルス列であるデルタ関数 $\delta(t)$ との掛け算なのは、たとえばアナログ・デバイセズのアプリケーション・ノート

AN-756, Sampled Systems and the Effects of Clock Phase Noise and Jitter

にも p.2 にも以下のような記載があります。

“While the sampling process can be considered a multiplication in time and convolution in the frequency domain,”

ここで convolution は「畳み込み」という意味です。

しかし某所でも「論文とか本とかも間違いが結構多い」という著名な方の発言もあり、「うーむ（汗）」とも思っていました（笑）。このエンジニアの方からも「このあたりは、理学あるいは数学と工学の谷間なのか、判りやすく書かれた本が少ないように思います」というコメントもいただきました。

一方 DAC は時間軸では畳み込みで、周波数軸では「掛け算」

ADC でのサンプリング動作は「時間軸ではサンプリング・インパルス列との掛け算で、周波数軸では畳み込み」というのはここまで説明してきたとおりです。

一方で DAC についてはこれが逆で、図 4 のように「時間軸では（DAC 出力値で重みづけされた）サンプリング・インパルス列とテンプレート波形との畳み込み、周波数軸では掛け算」になります。この詳しい説明については、TNJ-014 に記載してありますので、是非そちらをご覧くださいと思います（この技術ノートでは深く説明しません）。

すくなくとも「A/D 変換も D/A 変換も、コンバータ信号処理としてはアナログ領域とデジタル領域間を変換しているわけだが、振る舞いとしてはだいぶ異なるもの」と言えるかと思います。

ということで、ADC と DAC の変換動作と信号演算処理である畳み込みや掛け算との関係を紐（ひも）解くことができました。つづいてこの話を、サンプリング・クロックのジッタと信号波形や変換値との関係に広げてみたいと思います。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-015

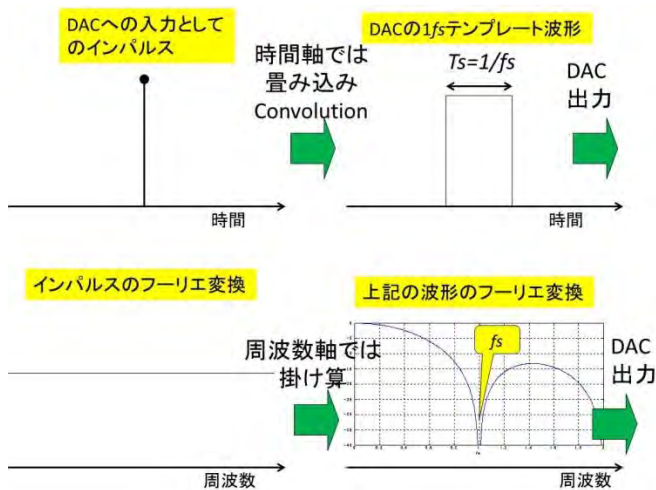


図 4. DAC は時間軸ではサンプリング・インパルス列との畳み込みで、周波数軸では掛け算

サンプリング・クロックのジッタと ADC や DAC の信号波形や変換値の関係を考える

次にサンプリング・クロックのジッタと A/D 変換値や D/A 変換信号波形との関係を、この掛け算と畳み込みと関連付けて考えてみたいと思います。

A/D 変換の場合は信号周波数でジッタによる SNR が変化する

A/D 変換におけるサンプリング・クロック（ここまでするところのサンプリング・インパルス列）がクロック・ジッタを持っていると、A/D 変換した結果の SNR が低減します。クロック・ジッタの rms 量（単位はラジアン）を σ [radian]、クロック周波数 f_c [Hz]、A/D 変換のアナログ信号周波数を f_A [Hz]とすると、SNR は

$$SNR = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left(\frac{f_c}{f_A} \right)^2 \quad (2)$$

で表されます。これはアナログ・デバイセズのアプリケーション・ノート AN-741 に詳しい説明がありますので[2]、是非ご覧ください。

この式(2)から分かることは、サンプリングされた信号の SNR は、クロックとアナログ信号の周波数比によって変わります。アナログ信号周波数が高くなるにつれて SNR は低下します。つまりアンダー・サンプリング（信号周波数がナイキスト帯域よりも上となり、その折り返しを A/D 変換結果として得る変換方法）の方がベースバンド・サンプリング（ナイキスト帯域内で動作させる変換方法）よりもはるかに良い位相ジッタを持つクロックが必要になるわけです。

実はこの AN-741 の説明、そして式(2)が得られる過程としては、ADC でのサンプリング動作は「時間軸ではサンプリング・インパルス列との掛け算」という考えを使っています。それにより A/D 変換した信号の SNR が低下することになります。

D/A 変換の場合は信号周波数が変わってもジッタによる SNR がしない

一方で D/A 変換におけるサンプリング・クロックのクロック・ジッタによる影響は、A/D 変換と比較して低くなります。AN-741 では（若干式変形してみましたが）

$$SNR = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{f_A}{f_c}\right)} \quad (3)$$

と表されており、「したがって、DAC からの位相ノイズは高周波数では増加しません」と書いてあります。実はこれは D/A 変換では「時間軸では（DAC 出力値で重みづけされた）サンプリング・インパルス列とテンプレート波形との畳み込み、周波数軸では掛け算」ということと関係しています。

時間軸でのジッタというのが、そのまま源信号データ列（に相当する信号波形）と畳み込みされていることにより、こうなります。この AN-741 は非常に良いアプリケーション・ノートなのですが、説明が難解というところも一方であるので、別途、私もこの技術ノート・シリーズで詳細に解説してみたいと思っています。

（余談）これまでの素朴な疑問を開陳してみる

どうも現実と数学の繋がりというのは、なんと難しいところもありますね。馬シカをさらすつもりで（笑）、自分のこれまでの（過去からの）時間領域と周波数領域との関係に関する疑問を以下に書いてみます…。アカデミックな分野の方々には「コイツわかってねーな」と言われそうですが（汗）。

パーセバルの定理と時間軸・周波数軸それぞれで見たエネルギー

パーセバルの定理(Parseval's theorem)からすれば、時間領域エネルギーと周波数領域エネルギーは一緒…とあります（たとえば wikipedia）。

インパルス関数は時間軸で積分すると"1"、周波数軸では $p(\omega) = 1$ ですから $\omega \rightarrow \infty$ で積分すると発散しますよね。インパルス関数が超関数だから良いのでしょうか？

このネタには先のエンジニアの方からも「いやあ、みんな同じ疑問を持つんだなあ〜」というコメントを頂けたことも大変うれいものでした（笑）。

インパルス関数はいろいろな定義ができるようですが（たとえば、松尾博; やさしいフーリエ変換 [3]）、ここでは sinc 関数で考えてみました。図 6 は時間軸としての sinc 関数（の自乗 = 瞬時電力）波形、図 7 は sinc 関数のフーリエ変換対（rectangular…つまり矩形形状、Y 方向は補正なし）です。この左の時間軸が極限になっていくと、右側の周波数軸が極限まで伸びていく、というかたちでインパルス関数を定義する（ひとつの考えの）ようですね。

この図 6 や図 7 のままだと、時間領域と周波数領域のエネルギーは $t \rightarrow \infty$ や $\omega \rightarrow \infty$ でそれぞれ収束しています。ここで sinc パルスの時間での極限を考えると…ということでしょうか？でも、そうすると周波数領域上で周波数方向にパルスに矩形形状が引き伸ばされていくわけですから、これでは任意の ω で $p(\omega) = 0$ になっていくわけで、本来のインパルス関数である「周波数軸ではどこでも $p(\omega) = 1$ 」ではないですね…。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-015

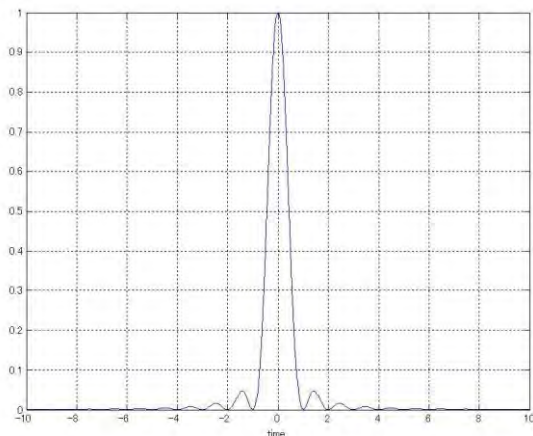


図 5. 時間軸としての sinc 関数（の自乗 = 瞬時電力）波形

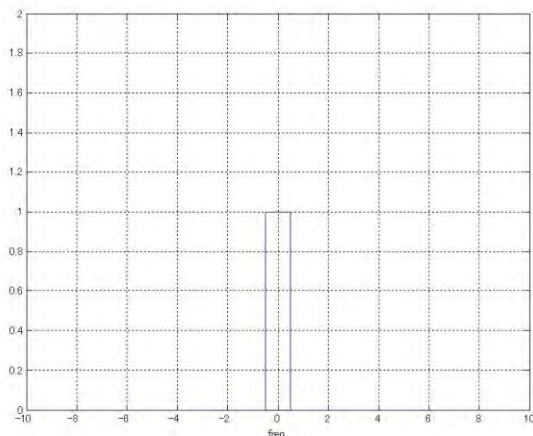


図 6. sinc 関数のフーリエ変換対（rectangular…つまり矩形形状）Y 軸は正しい大きさとして補正していない

関係ないがクーロンの法則とマクスウェルの方程式

全然関係ないのですが、クーロンの法則

$$F(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (4)$$

は「実験式」だそうですね！距離 r^2 はぴったり自乗ではなく、 $2+\delta$ の未知数が（未だに）あるのだとか…（電磁気学の教科書に記載があります）。でもガウスの定理などはぴったり 2 として考えていますし、それからマクスウェルの電磁波が導かれて、高精度な理論が成り立っていますが、さて、この「 δ 」と二つの公式はどう繋がるんだろうか？とも思ったりしています。

0.9 が 1 なのは気持ち的に受け入れがたい（？）が…

数学では 0.999… で無限に 9 が続く「0.9」は = 1 だそうですね。これもデニキ屋としては、やはりどうも気持ちが悪く受け入れてくれません…。とか言いつつ、「過渡現象で十分時間が経てば最終値」とか何とか言ってますね…（笑）。

参考文献

- [1] 石井聡; 合点！電子回路超入門, CQ 出版社
- [2] Paul Smith; 位相ノイズの知られざる特性, アプリケーション・ノート AN-741, Analog Devices
- [3] 松尾博; やさしいフーリエ変換, 森北出版