



TNJ-004 アナログ電子回路技術ノート

抵抗のサーマル（熱）ノイズを SPICE でシミュレーションしてみる

著者: 石井 聡

はじめに

ここでは、なかなか理解が難しい「ノイズ」（ホワイト・ノイズ）の振る舞いについて、その基礎的なことと、NI Multisim でシミュレーションしたようすについて、それぞれの関係を考えてみます。

抵抗からサーマル・ノイズが発生する

抵抗からノイズが発生します。電源を接続していなくてもです。これをサーマル（熱）ノイズとか Johnson ノイズとか言います。これ以外にも、PN 接合をキャリアが通過するときにショット・ノイズという電流性ノイズが発生します。また 1/f ノイズというものもあります。これらについては、ここでは深く取り扱わないことにします。

さてここでは、抵抗から発生するノイズをどう考えるかを、まず示します。そしてそれが OP アンプと、電子回路として組み合わせられることで、OP アンプの内部ノイズと合成されたものとして、どのようにノイズが OP アンプ出力に現れるかを考えてみたいと思います。

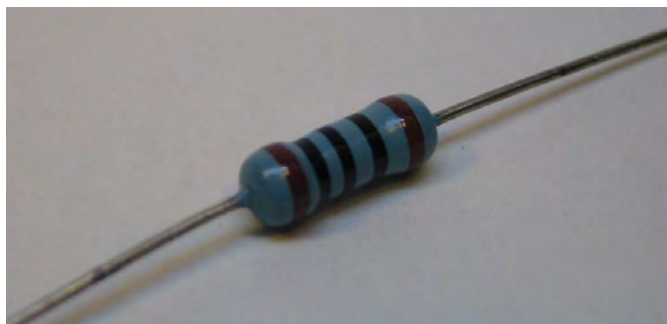


図 1. 電源を繋がなくとも抵抗からはノイズが発生している
(金属皮膜抵抗の例)

OP アンプ内部ノイズも外部ノイズ源で表せる

OP アンプ内部にも電圧性／電流性ノイズがあります。電流性ショット・ノイズもその一部に変換されます。そしてそれらは、外部接続されたノイズ源として、等価的に表すことができます。結果的にそれらはすべて、この技術ノートで説明することと結びつけることができます。

参考になる Application Notes

この技術ノートに関連したものとしては、以下の Application Notes が参考になると思います。

- AN-358 ノイズと OP アンプ回路
- AN-940 最適ノイズ性能を得るための低ノイズ・アンプ選択の手引き

ここでの「ノイズ」とは「ホワイト・ノイズ」

ノイズはいろんなノイズがあります。デジタル回路からの混入ノイズ、スイッチによるノイズなどもあります。

ここでは、周波数に依存しない「ホワイト・ノイズ」というものを考えます。これはローノイズ・システムでは重要な概念です。

白色光はプリズムで見ると、広い帯域のスペクトルを均一に持っています。これから説明するノイズが「ホワイト・ノイズ」と言われるゆえんは、「周波数に依存せず同じレベル」であるものなので、白色光（ホワイト）に合わせてそのように呼ばれます。

いろいろな呼ばれ方があるが同じもの

ノイズで主に使われる用語（種類）には、サーマル（熱）ノイズとか、ジョンソン・ノイズとか、ナイキスト・ノイズと呼ばれるものがあります。しかし実際はすべてホワイト・ノイズで、同じものです。「なんで Johnson, Nyquist のふたりの別名なのか？」と改めて Wikipedia で見てみると、Bell 研で Johnson が見つけて、それを情報通信の父の Nyquist が理論だてたということのようです。

ホワイト・ノイズの電力

このノイズの電力は

$$P = kTB [W]$$

で示されます。面白いもので、抵抗の大きさ R によらず、ボルツマン定数 k と絶対温度 T と、取り扱う帯域幅 B の積になっています。以降では $B = 1\text{Hz}$ として単位帯域で考えていきます。全体のノイズ量は（電力で計算すると） B [Hz]倍すればいいだけです（電圧なら $\sqrt{B}$ 倍）。

上記の式が実際は何者かということ、図 2 のように R_{source} という抵抗（純粋な抵抗成分）があり、これがサーマル・ノイズという電圧信号源を（図中のように）持っており、その電圧源が R_{load} という（ $R_{\text{source}} = R_{\text{load}} = R$ とマッチングした）、ノイズレスの負荷 R [Ω]に発生する電力として規定されているものです。

なんでこんな風に定義するのか、そしてこのような簡単な関係で表されるかは、それこそ Johnson や Nyquist の研究成果である、物理的振る舞いに基づいていますが、あいにくご紹介できるレベルに至っておりません…。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

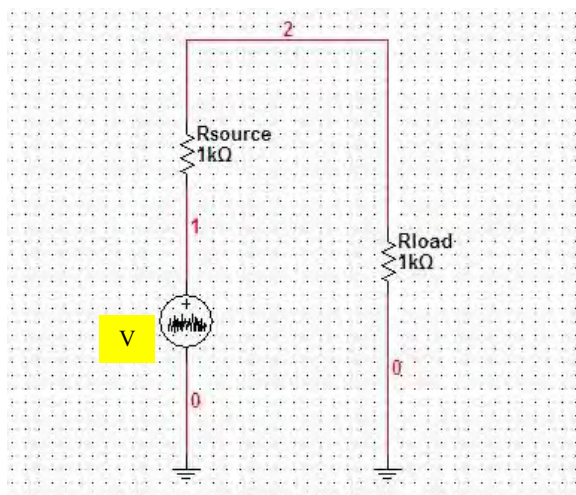


図 2. 抵抗のサーマル・ノイズ・モデル

「ノイズ源」と言っても「電圧源」

さて、ノイズ源と言っても電圧源ですから、電力は $P = V^2/R$ で計算できます。 $R_{source} = R_{load} = R$ で、図 2 の電圧源 V から見ると、 R_{load} 側で $P = k T B [W]$ が生じているわけですから、単純な直流回路計算で、電圧源の大きさ $V [V]$ は

$$V = \text{SQRT}(4 k T B R) [V]$$

と計算できます ($\sqrt{\text{SQRT}}$ です)。これが抵抗 R から生じる電圧ノイズです (抵抗 R_{source} の両端を解放した電圧と同じ)。

$B = 1\text{Hz}$ として正規化してみますと、

$$V = \text{SQRT}(4 k T R) [V/\sqrt{\text{Hz}}]$$

になります。 $\sqrt{\text{Hz}}$ でルートがついているのは、あとで説明しますが、今のところ無視していただいて「1Hz で正規化しているのだ」と思ってください。

並列抵抗のノイズはどうなる？

先の例では R_{load} はノイズ・フリーの理想抵抗としましたが、図 3 のように、本来の抵抗素子が二つ並列に接続された場合はどうなるでしょうか。

$$V1 + V2$$

でしょうか…。ところがこれがそうはならないのです。これも単純な抵抗網の計算となるのですが…。

① $V1$ により、 $R1$ と $R2$ の接続点 Vc に生じる電圧 $Vc1$ は、

$$Vc1 = V1 \cdot R2 / (R1 + R2)$$

② $V2$ により、 $R1$ と $R2$ の接続点 Vc に生じる電圧 $Vc2$ は、

$$Vc2 = V2 \cdot R1 / (R1 + R2)$$

というように、それぞれの抵抗分圧になります。このように各電圧は抵抗分圧で「まずは」求められます。これは単純な話です。

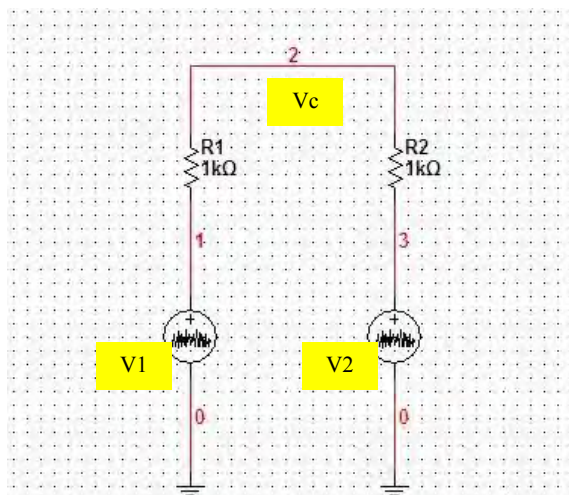


図 3. 抵抗の並列接続ノイズ・モデル

ところが、合成の電圧は、単純に (重ね合わせの定理での) $Vc = Vc1 + Vc2$ にはなりません。ノイズの合成の場合は、電力による足し算…「電力による重ね合わせの定理」になり、Root Sum Square, RSS として計算されます。つまり

$$Vc = \text{SQRT}(Vc1^2 + Vc2^2)$$

となります。電力は $P = V^2/R$ ですから、これと似ているわけですが (似ているというより、ノイズ同士は無相関信号なので、電力の和になる)。

1kΩ の抵抗の並列接続で考えてみる

たとえば一本の抵抗 $R1 = 1\text{k}\Omega$ があつた場合、 $B = 1\text{Hz}$ として正規化したとき、このノイズ電圧は

$$V = \text{SQRT}(4 k T R1) [V/\sqrt{\text{Hz}}]$$

ここで

$$k = 1.38\text{E-}23 \text{ J/K}$$

$T = 273\text{K} + 27^\circ = 300\text{K}$ (周囲温度 27° として考えます)

$$R1 = 1 \text{ k}\Omega$$

で、 $4.07\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ になります。

「これが並列に接続されたら？」というのが先の話なわけで、 8nV にはならず ($R1 = R2 = R$ とすれば)、

$$Vc1 = 4.07/2 = 2.03\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

$$Vc2 = 2.03\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

$$Vall = \text{SQRT}[(2.03)^2 + (2.03)^2] = 2.87\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

と計算できます。

結局は 500Ω の抵抗と同じノイズ電圧になる

$1\text{k}\Omega$ を 2 個の並列接続抵抗値は、当然 500Ω ですが、 500Ω のノイズ電圧を $\text{SQRT}(4 k T R)$ で計算すると、 $2.88\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ になります。

結果的に $1\text{k}\Omega$ を 2 個の並列接続でも、 500Ω 1 個でも (有効数字の問題で、ここでの説明上では誤差が出ていますが) 同じノイズ電圧になります。

おもしろいものですね。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

NI Multisim でシミュレーション

ここまでの説明をもとに、NI Multisim Analog Devices Edition を用いて簡単なシステムを構成し、これをシミュレーションで計算させてみます。

シミュレーション回路図

図 4 はシミュレーション用の回路図です。信号源 V1 はノイズ解析には「動作」としては関係ないものです。シミュレータはシミュレーション結果として、「出力端のノイズ」を入力信号源部分に相当するレベル（入力換算量）に変換して表示してくれます。この信号源 V1 は、その入力信号源（入力換算量）に相当する部分を明示的に示すものです。「明示的に示す」だけです。電圧レベルはいくらでも良く、ここではゼロにしています。

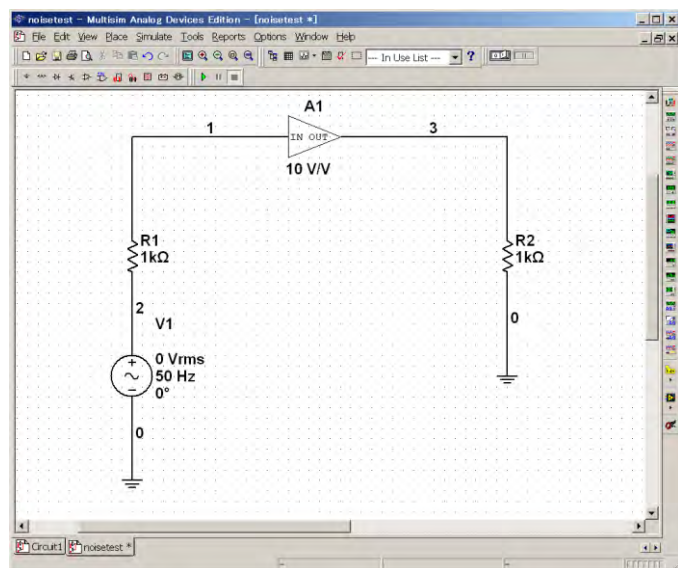


図 4. ノイズ・シミュレーション用回路図

入力換算ノイズの考え方

繰り返しますが、シミュレーションは基本的に「出力端」のノイズ・レベルを表示します。回路全体を増幅器として考えれば、(仮に存在すると仮定する) 仮想ノイズ信号源から、その回路の増幅度で、その信号源からのノイズ信号が出力に現れると考えることもできます。

そこで、実際に出力に現れているノイズすべてが（回路全体がノイズ・フリーだとして）仮想ノイズ信号源から発生したと考え、その大きさを表したものが「入力換算ノイズ」です。「入力信号源に相当するレベルに変換したもの」ということもできます。

SPICE シミュレータは、出力端のノイズ・レベルからシステムの増幅度を差し引いて、「入力換算ノイズ」も表示してくれます。

ノイズ・シミュレーションの設定画面

図 5 はノイズ・シミュレーションの設定画面です。これはどの端子を測定するか、どの端子を基準電位とするかを設定するもので、上から入力換算ノイズとして変換される信号源、次がノイズ量として測定される出力端（V(3)）、最後が基準電位（通常はグラウンド、V(0)）です。一番下のチェックボックスはオンしてください。これをチェックして範囲を入力しないと、結果をグラフ表示してくれません。そのために確実にここを設定してください（Ver. 10 の場合）。

図 6 はシミュレーションする周波数範囲の設定で、ここでは 1Hz～100MHz までとしています。

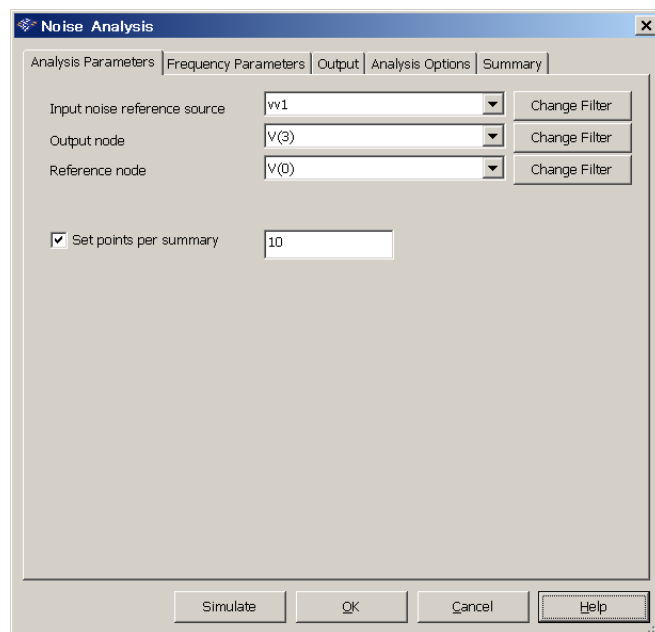


図 5. ノイズ・シミュレーションの設定画面

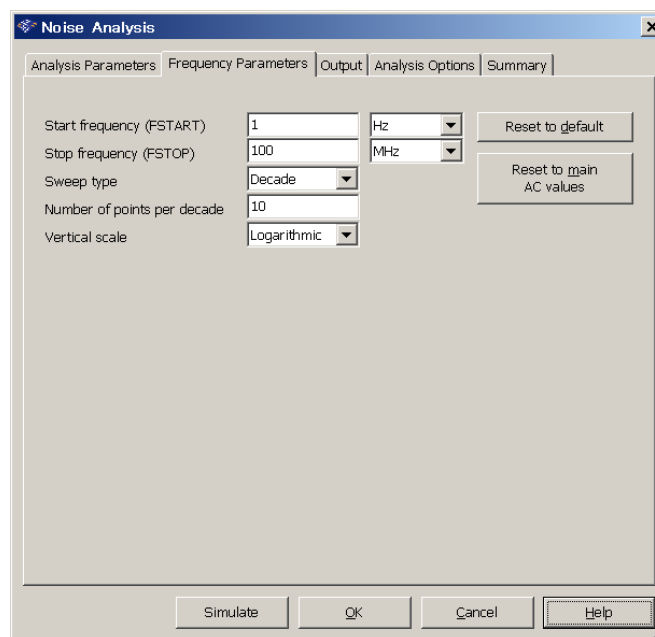


図 6. シミュレーションする周波数の設定画面

図 7 はどのノイズを表示させるかの設定です。onnoise_spectrum は、出力端(3)に実際に現れるノイズ・レベル、inoise_spectrum は入力信号源 V1 に換算されたノイズ・レベル、onnoise_rr1 は R1 から生じるノイズが出力端(3)に現れるノイズ分になります。onnoise_rr2 は同じく R2 から生じるノイズ分です。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

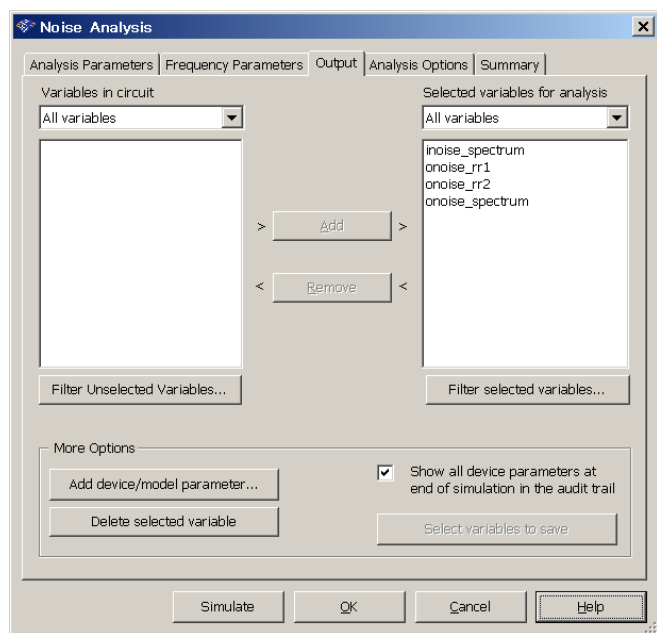


図 7. 表示するノイズ・ソースの設定画面

回路図上のコンポーネント

図 4 の回路との関係も説明しておきます。入力側の V1 は（先に説明したように）入力換算ノイズ源に相当する部分を明示的に示すものです。

R1 は実際のジョンソン・ノイズ発生源 ($4.07\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$) となります。V1 は電圧源（ここでは電圧はゼロですが）なので「電圧源の内部抵抗はゼロ」として考えるので、R1 は直接グラウンドに接続されていることになります。

このように接続することで、R1 から発生しているジョンソン・ノイズを測定できることになります。

A1 は理想増幅器（ノイズ・フリー）です。ここでは増幅度 $A = 10$ 倍としてあります。理想増幅器ですから $A = 10$ で計算するだけでノイズを発生させるものではありません。こうすれば A1 の入力ハイ・インピーダンス、出力インピーダンスがゼロになりますので、A1 を電圧バッファとして考えることができます。出力(3)には R2 が接続されています。これ自体も本来ジョンソン・ノイズ ($4.07\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$) を発生するものではありませんが、この回路構成でどのように振舞うかは、シミュレーションで見ましょう。

シミュレーション結果

シミュレーション結果を図 8 に示します。ここでは Grapher を Marker ON, Color non reverse, Legend (凡例) ON, Grid ON にしています。マーカーは 1kHz を指しています。

「図がやけに縦長だなあ…」というのは、気にしないでくださいませ（笑）。

詳しい話は以降に改めて示しますが、まずは少なくとも「周波数によらずノイズ・レベルが一定」であることが判ると思います。一定のスペクトル・レベルがホワイト・ノイズです。

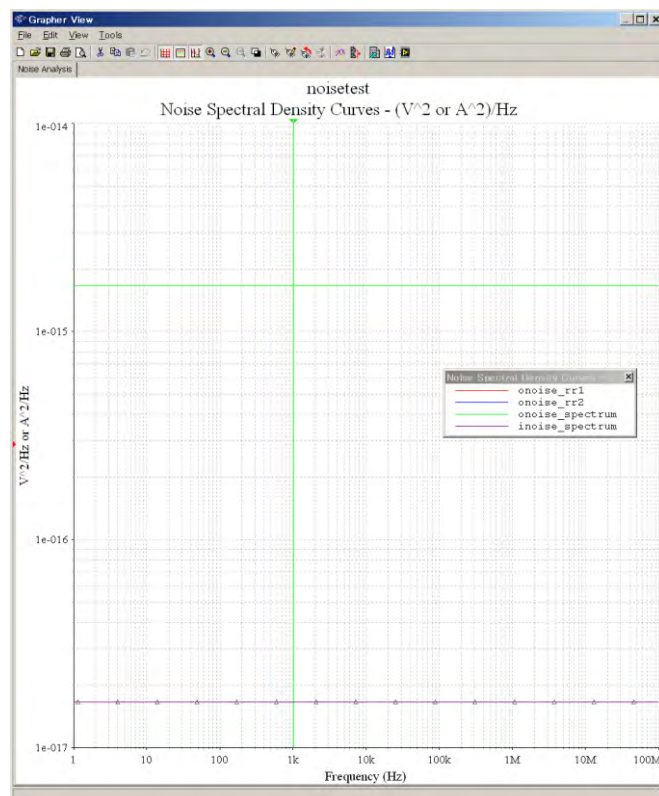


図 8. シミュレーション結果

マーカーで値を読み出してみる

図 9 のマーカー・リードアウトで、noise_spectrum のリードアウト (y1) が $1.6576\text{e-}17$ という大きさです…。図 8 の左の縦軸を見ると、これは V^2/Hz （つまりここまで説明してきた $\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ の 2 乗）で表示されているのですね。

でも A^2/Hz という文字も見えますね…。これはどういうことでしょうか。 $\text{V}^2/\text{Hz} = 4\text{kTBR}$ であり、 $\text{A}^2/\text{Hz} = 4\text{kTB/R}$ で、同じ単位にはなりませんね。

まあまずは、今のところは「この単位は V^2/Hz なのね」と思ってください。

SPICE 恐るべし…

まだまだ続くのですが、ホントに「SPICE 恐るべし…」です。このノイズ解析の体系についても、完全にきちんと、表示の考え方で、全て整合が取れているのです。これが素子モデルから伝送線路まで、複数のシミュレーション計算方法で、きちんと SPICE シミュレーションとして、全て成り立っているのですから…。たいしたものだと思います。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

	onoise_rr1	onoise_rr2	onoise_spectrum	inoise_spectrum
x1	1.0028k	1.0028k	1.0028k	1.0028k
y1	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
x2	1.0028k	1.0028k	1.0028k	1.0028k
y2	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
dx	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
dy	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1/dx				
1/dy				
min x	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
max x	100.0000M	100.0000M	100.0000M	100.0000M
min y	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
max y	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
offset x	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
offset y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

図 9. マーカ・リードアウトの画面

	onoise_rr1	onoise_rr2	onoise_spectrum	inoise_spectrum
x1	1.0028k	1.0028k	1.0028k	1.0028k
y1	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
x2	1.0028k	1.0028k	1.0028k	1.0028k
y2	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
dx	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
dy	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1/dx				
1/dy				
min x	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
max x	100.0000M	100.0000M	100.0000M	100.0000M
min y	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
max y	1.6576e-015	0.0000	1.6576e-015	1.6576e-017
offset x	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
offset y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

図 10. マーカ・リードアウト画面をよく見てみる

マーカと計算値を比較してみる

図 10 は図 9 の大切なところをハイライトしたものです。

onoise_rr1, onoise_rr2 の値

一番左の赤シカクは onoise_rr1 で、2 乗された大きさに相当します。マーカ周波数 = 1kHz で、出力(3)に現れる R1 のノイズ量として 1.6576e-15 です。次の onoise_rr2 も同じ意味ですが、R2 としてはゼロですね… (あとで説明します)。

また onoise_rr1 の値が onoise_spectrum の値と同じということも気がきます。つまり少なくともここで判ることは、出力ノイズは R1 によるものが全てで、R2 は関係していないということです。

inoise_spectrum を理論値と比較してみる

一番右の赤シカク inoise_spectrum の値を見てみましょう。これも V^2 で、2 乗された大きさに相当します。これまでの説明、また図 4 からこれは R1 により発生しているノイズだけに影響されるとみることができます。

それではこの inoise_spectrum の値を、1k Ω の理論値 $\text{SQRT}(4kTB) = 4.07\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ と比較してみましょう。1k Ω の理論値を 2 乗してみると $(4.07\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}})^2 = 1.65749\text{E-17}$ になり、inoise_spectrum の値と同じですね！

温度は摂氏 27°C で計算している

理論式のとおりのノイズ量は、絶対温度 T [K] のルートに比例します。SPICE の計算では、温度 T についてはデフォルトで $T = 300\text{K}$ 、つまり室温 27° で計算しています。

onoise_spectrum の値

$\text{onoise_spectrum} = \text{onoise_rr1} = 1.6576\text{e-15}$

になっています。ここでは R1 相当分のノイズだけが出力ノイズに関与しています。

A1 の増幅度が 10 倍、また R1 から発生するノイズは説明のとおりの inoise_spectrum とイコールであり、この inoise_spectrum が 10 倍、2 乗で 100 倍になり、onoise_spectrum は inoise_spectrum と値が同じで、係数が e-15 となっているわけです。

なぜ R2 からのノイズがゼロになるのか

R2 から出力(3)に現れるノイズはゼロです。これは抵抗並列接続の説明のとおりで、A1 の出力インピーダンス $\text{RoutA1} = 0$ ですから、A1 の出力ノイズ V(3)は

$$V(3) = V_{r2} \cdot \text{RoutA1} / (\text{RoutA1} + R2) = V_{r2} \cdot 0 / (0 + 1\text{k}\Omega) = 0$$

となるわけです。ここで V_{r2} は抵抗 R2 で発生するノイズです。

入力回路に並列に 1k Ω を接続してみる

図 11 をご覧ください。こんどは「少しひねって」、入力回路に並列に 1k Ω の R3 を接続してみます。この場合もこれまでの説

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

明のように、入力回路全体で 500Ω の抵抗になり、それから生じるノイズ量が A1 の入力に加わっていることになります。

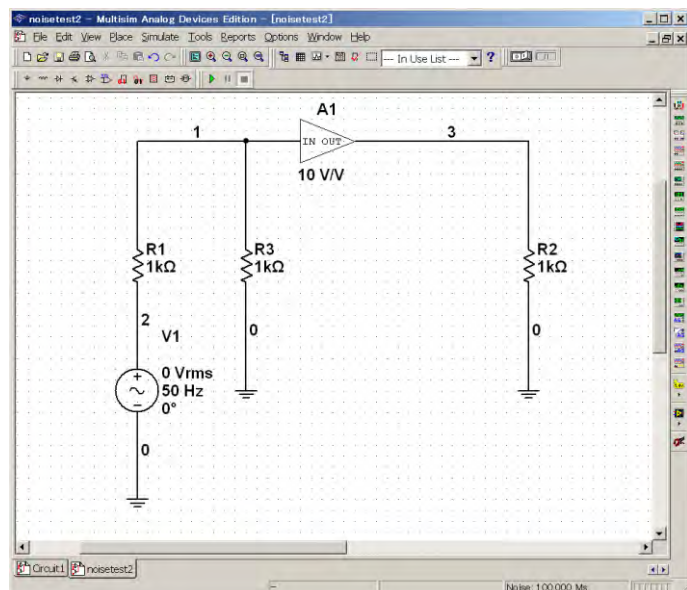


図 11. 入力回路に並列に $1k\Omega$ を接続してみる

つまり入力回路では $V^2 = 4kTR (500\Omega) = 8.284E-18 V^2/Hz$ になります。これが A1 で 10 倍に増幅されますが、SPICE 上の表示としては V^2 なので、10 倍の 2 乗で 100 倍となり、図 12 の赤いシカクのように `noise_spectrum` として $8.2879E-16$ になります。

noise_spectrum はどう考えるか

図 12 の `noise_spectrum` は、回路全体をノイズ・フリーとしたとき、出力(3)で `noise_spectrum` を生じる大きさ全てが、仮想ノイズ信号源 V1 から発生していると仮定したときの、V1 の大きさに相当します。

そのため V1 から出力(3)にかけての増幅率は、A1 の増幅率 10 ではなく、R1 と R3 の分圧で増幅率が $1/2$ になり、V1 から A1 出力(3)の端子間で 5 倍の増幅率になります。つまり計算上の増幅率は V^2 なので 2 乗で 25 倍になりますから、 $noise_spectrum/25 = 3.3152e-17$ が `inoise_spectrum` になっているわけです。

noise_rr1 は noise_spectrum の 1/2

また図 10 と比べて、図 12 の `noise_rr1` が異なる値になっていることがわかります。これは `noise_spectrum` の $1/2$ です。

これは R1 と R3 がノイズ源として出力に現れているためで、R1 と R3 が相互に分圧として影響した結果として、R1 から本来生じるノイズがその半分の量で (V^2 として考えると) 出力に現れているということです。これはこれまでの「 V^2 の足し算、電力での足し算、RSS である」という説明のとおりです。

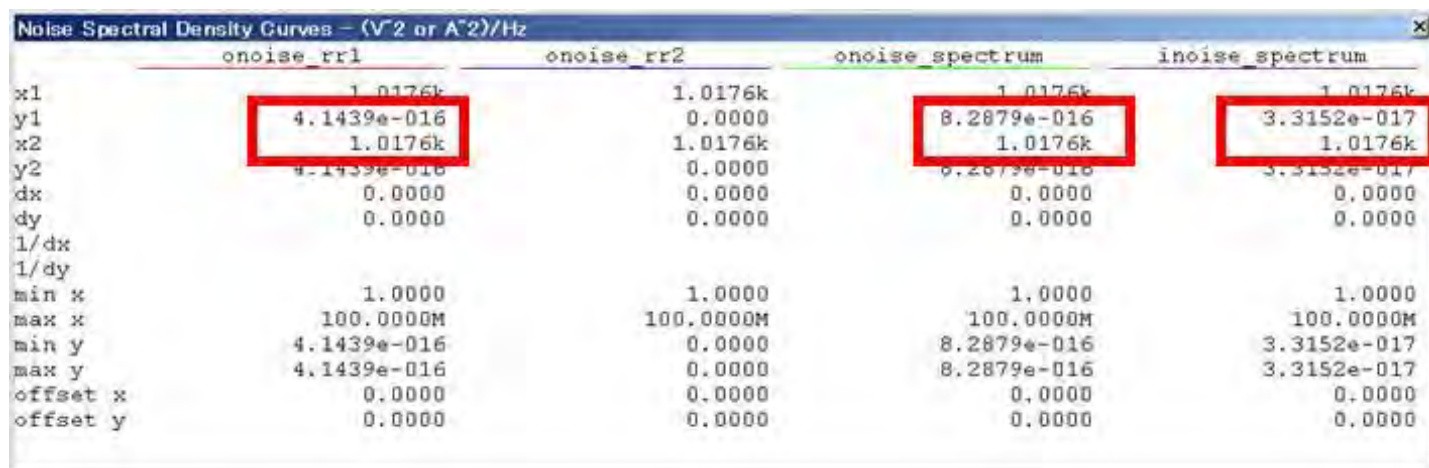


図 12. 図 11 のマーカ・リードアウト画面

電圧ノイズ源を等価電流ノイズ源に変換してみる

「 A^2/Hz という文字も見えますね…」のお話を説明したいと思います。ここまで図 13 のように、ジョンソン・ノイズは「電圧ノイズ」であるとして、ノイズ・フリー抵抗と直列でペアになる「電圧ノイズ」というモデルで考えてきました。

それを「電流ノイズ」として、等価電流源とノイズ・フリー抵抗でどうモデル化されるか考えてみます。それが「 A^2/Hz という文字も見えますね…」の答えでもあるわけです。

等価電圧源の場合（これまでの場合）

「電圧ノイズ」だとして入力換算表記で「等価入力換算ノイズ源」としてモデル化してみると、図 14 のようになります。図 14 の等価電圧源の場合は、 R_{source} と R_{load} にそれぞれ $V_N = \text{SQRT}(kTR) [V/\sqrt{Hz}]$ が加わりますから、等価電圧源は V_N の 2 倍で（ここまでの説明のように） $V = \text{SQRT}(4kTR) [V/\sqrt{Hz}]$ でした。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-004

等価電流源に変換してみた場合

これを図 15 のように、等価電流ノイズ源にした場合は、
Rsource と Rload にそれぞれ I_N が流れるようになります。 I_N によ
りそれぞれ $V_N = \text{SQRT}(kTR) [V/\sqrt{\text{Hz}}]$ (抵抗 1 本分なので "4" は
ありません) と同じ量が生じるとすれば、その等価電流源 (図
15) は図 14 の等価電圧源と「等価」になるわけです。

計算は省略しますが、この電流量は

$$I = \text{SQRT}(4kT/R) [A/\sqrt{\text{Hz}}], I^2 = 4kT/R [A^2/\text{Hz}]$$

となります。

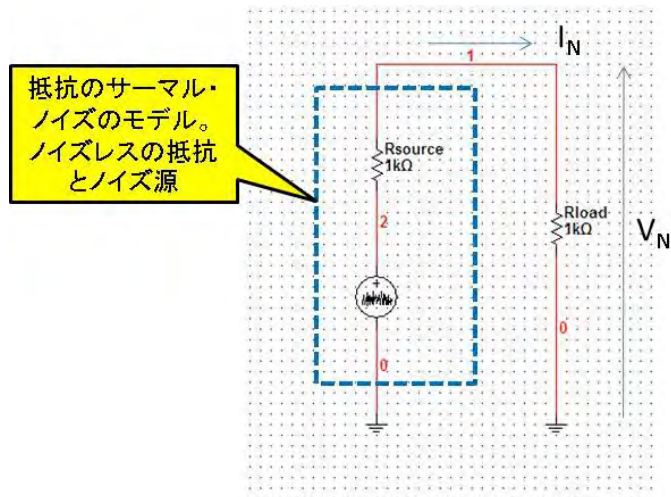


図 13. 抵抗のサーマル・ノイズ・モデル

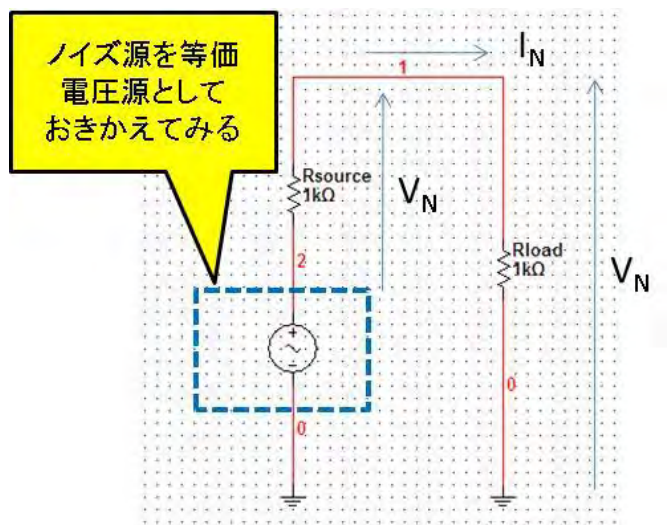


図 14. これまでの入力換算ノイズ源 (電圧源)

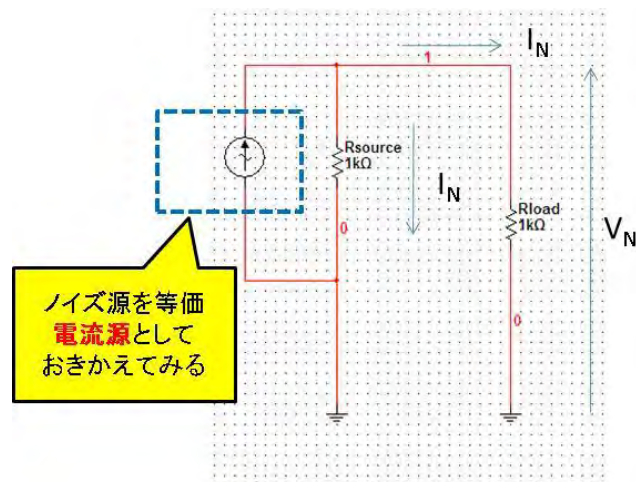


図 15. 電圧源を電流源に変換してみる

A^2 で答えが得られる場合というのは

これまでシミュレーション回路には、入力換算のため電圧源を
挿入していました。それを図 15 のように電流源として挿入すれ
ば、inoise_spectrum は電流量の 2 乗になり、 I^2 の大きさとして、
単位が $[A^2/\text{Hz}]$ として表される、マーカ読みが電流量になる、と
いうことになります (onoise_spectrum などは依然として電圧
量)。

Grapher で得られる答えが 2 乗である理由

Grapher で見られる結果として V^2 や I^2 になっているのは、そ
れぞれ足し算 (や掛け算や割り算) で計算すれば求まる (RSS
で計算することなく) ということです。さらに帯域 B [Hz] での
全体のノイズ量も、ルート計算を用いることなく、単純に B 倍
すればいいということです。

結果のルートを取れば、1Hz あたりのノイズ量や、帯域幅 B
[Hz] のノイズ電圧/電流が求まるわけです。

ホント「何か変じゃない?」と感じても、実際はよく考えられ
て出ていますね。

最後に

1Hz に換算された電圧ノイズの単位が $V/\sqrt{\text{Hz}}$ である理由を説明
しておきます。

ここまでの説明のように、帯域幅 B [Hz] は電力 (V^2 , I^2) に比例
する項ですから、電圧 V はこの平方根量になり、これに合わせて、
単位が $V/\sqrt{\text{Hz}}$ になっているのです。

OP アンプのデータシートでノイズ電圧/電流の単位が $V/\sqrt{\text{Hz}}$,
 $A/\sqrt{\text{Hz}}$ でルートなのは、これが理由です。

この技術ノートはこれで最後にして、もう一度別の技術ノート
で、こんどは本当の OP アンプを使ってノイズ解析をしてみま
す。