ANALOG DEVICES

想像を超える可能性を

AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

アナログ回路の数学的理解

ラプラス変換と伝達関数を知り、回路の応答をイメージできるようになる

アナログ・デバイセズ株式会社

リージョナル・マーケティング＆チャンネル

祖父江達也

セッションアジェンダ（目次）

- **ラプラス変換の基礎**
  - ラプラス変換とは？
  - ラプラス変換の基本公式
    - 主なラプラス変換公式
    - 単位ステップ関数のラプラス変換
    - インパルス関数のラプラス変換
    - オイラーの公式
    - 三角関数のラプラス変換
    - 初期値の定理と最終値の定理
  - 微分方程式をラプラス変換を使って解く
    - 力学で考える微分方程式
    - 微分方程式
      - 2つの解き方
    - 部分分数
      - ヘビサイドの展開定理
  - 線形システムと伝達関数
- **電気回路で考える**
  - 複素数平面
  - 複素平面と電気回路
  - 電気回路の伝達関数
  - 電気回路の応答解析
  - 伝達関数と1次遅れの系
  - ポールとゼロとシステムの安定性
  - 周波数特性
  - ボーデ線図
  - 回路シミュレータでボーデ線図
  - 時間応答を調べる
- **展示デモ紹介**
  - 高千穂交易様ブース
    - 実機と回路シミュレータとの比較
- **参考資料**
  - オンラインツールのご紹介他

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

ラプラス変換

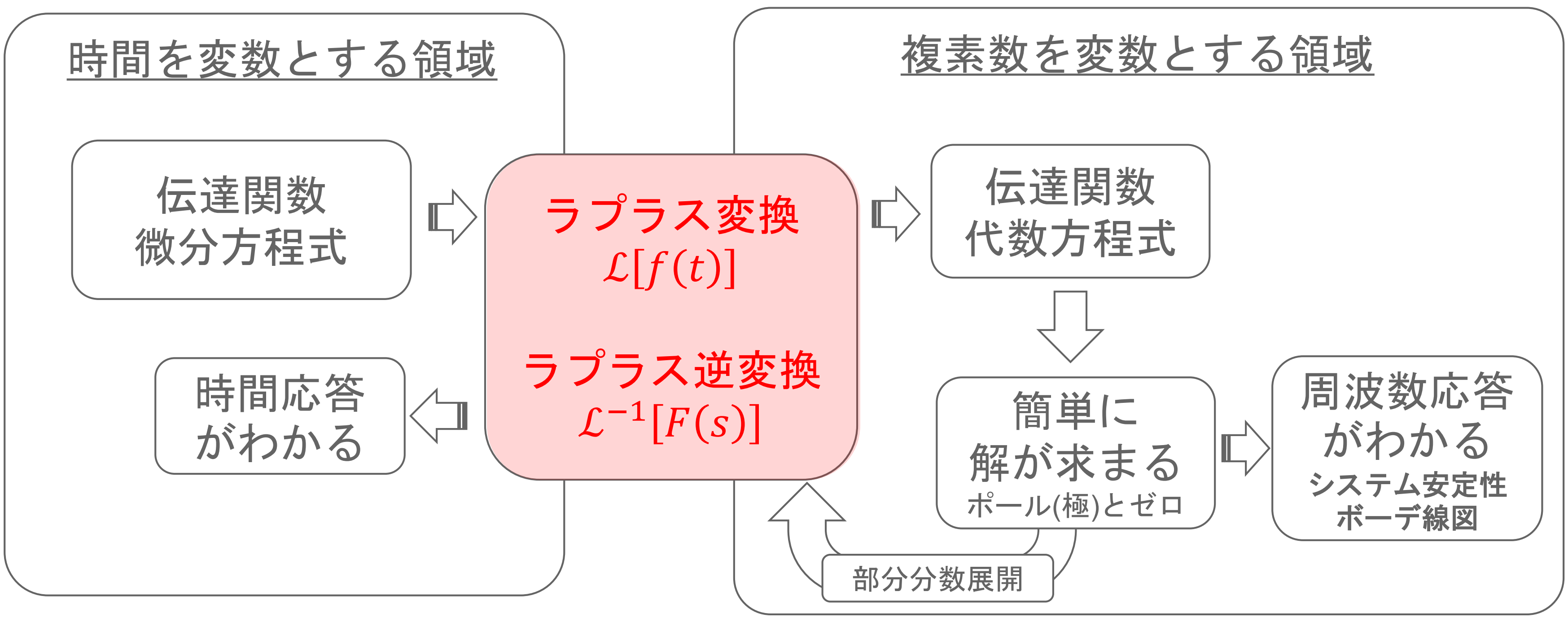
SECTION SUBTITLE

オリバー・ヘビサイド
Oliver Heaviside
1850-1925
Wikipediaより

"I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion."

「私は消化のプロセスを知らないからといって食事をしないわけではない」

ラプラス変換の基礎


時間を変数とする領域
伝達関数
微分方程式
時間応答
がわかる
ラプラス変換
$\mathcal{L}[f(t)]$
ラプラス逆変換
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
複素数を変数とする領域
伝達関数
代数方程式
簡単に
解が求まる
ポール(極)とゼロ
周波数応答
がわかる
システム安定性
ボーデ線図
部分分数展開

ラプラス変換とは？
もとの関数$f(\mathrm{t})$にe^{-st}をかけて0→∞まで積分したもの

ラプラス変換 $$F(S) = \int_0^\infty f(\mathrm{t})\, e^{-st} dt$$

sはラプラス演算子と呼び
$s = \sigma + j\omega$
と複素数で定義する
σ(シグマ)は減衰項(振幅成分)
ωは角周波数(周波数成分)

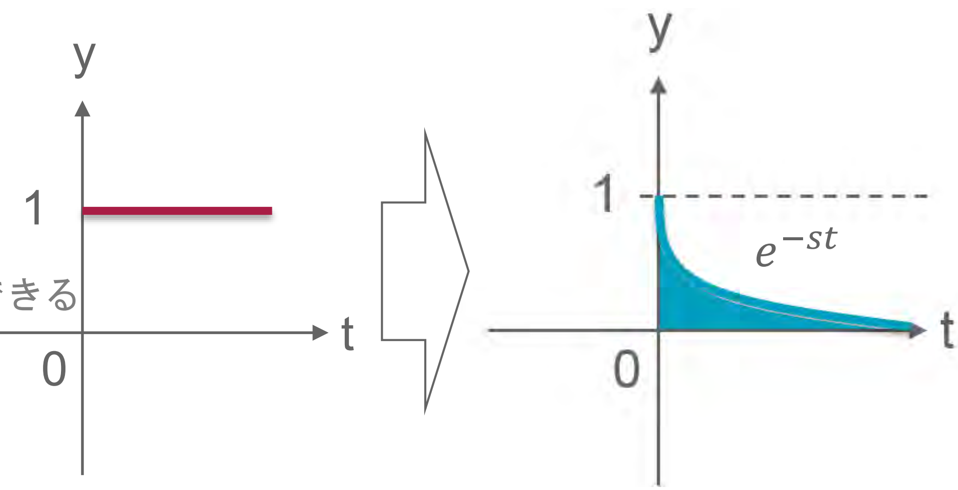
$f(\mathrm{t})$は$\mathrm{t} \geqq 0$で定義されており、区分的に連続な関数と考える、$\mathrm{t} < 0$では$f(\mathrm{t})$は0

ラプラス逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\omega}^{a+j\omega} F(S) e^{st} ds$$

ラプラス変換の3つの効用

- 微積分方程式を代数方程式に変換することができる
- 微積分方程式を機械的に解くことができる
- 初期値を反映して計算することができる



想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

練習問題1

次の関数のラプラス変換

$$f(\mathrm{t}) = e^{at}$$

を求めてみよう

ヒント：指数関数の積分公式

$$\int_{\beta}^{\alpha} e^{ax}\,dx = \left[\frac{1}{a}e^{x}\right]_{\beta}^{\alpha}$$

主なラプラス変換の公式

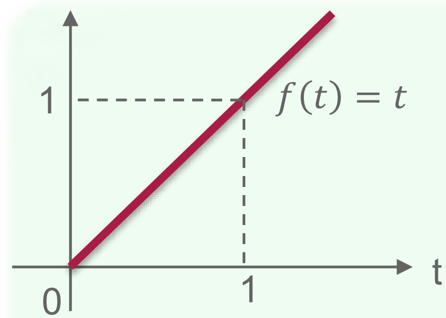
- $\mathcal{L}\left[\frac{df(\mathrm{t})}{dt}\right] = \mathrm{sF(s) - f(0+)}$: 微分則
- $\mathcal{L}\left[\int^t f(\mathrm{t})dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{Init(0)}{s}$: 積分則

指数関数の微積分と同じイメージ

$$\frac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$$

$$\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$$

- $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$: 線形則
- $\mathcal{L}[af(t)] = \frac{1}{a}\mathrm{F}(\frac{s}{a})$: 相似則
- $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}X(s)$: 推移定理
- $\mathcal{L}[e^{-\mathrm{at}}f(t)] = F(s+a)$: 変移則
- $\mathcal{L}[e^{-\mathrm{at}}] = \frac{1}{s+a}$: 指数減衰関数
- $\mathcal{L}[e^{\mathrm{at}}] = \frac{1}{s-a}$: 指数関数
- $\mathcal{L}\left[e^{-j\varpi t}\right] = \frac{1}{s-j\varpi}$: 複素周波数



ランプ関数
傾き一定で変化

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty te^{-st}dt$$

$$= \left[t(-\frac{1}{s}e^{-st})\right]_0^\infty - \int_0^\infty(-\frac{1}{s}e^{-st})dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s^2}$$ (ランプ関数のラプラス変換)

練習問題1の答え

次の関数のラプラス変換

$f(\mathrm{t}) = e^{at}$

を求めてみよう

ヒント：指数関数の積分公式

$$\int_{\beta}^{\alpha} e^{ax}\,dx = \left[\frac{1}{a}e^{x}\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$\mathcal{L}[f(\mathrm{t})] = \int_0^\infty e^{at}\,e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} - \frac{1}{a-s}$$

$\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t}$が収束するための条件は

$\mathrm{Re}[a-s] < 0$

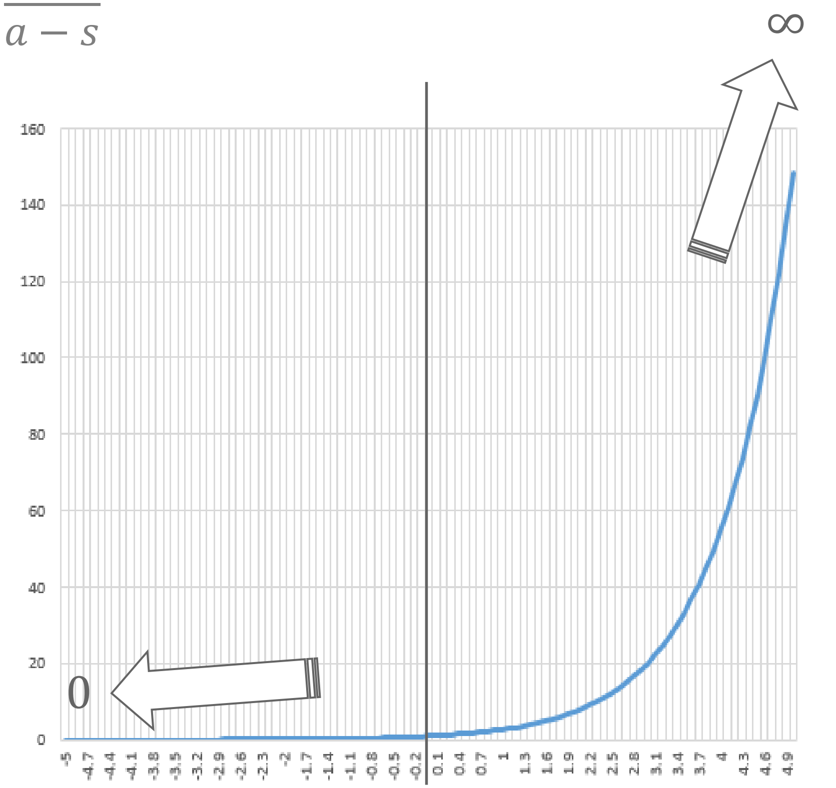
である必要がある。この条件において、

$$\mathcal{L}[f(\mathrm{t})] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

となる

$$\mathcal{L}[e^{\mathrm{at}}] = \frac{1}{s-a}$$ ：指数関数

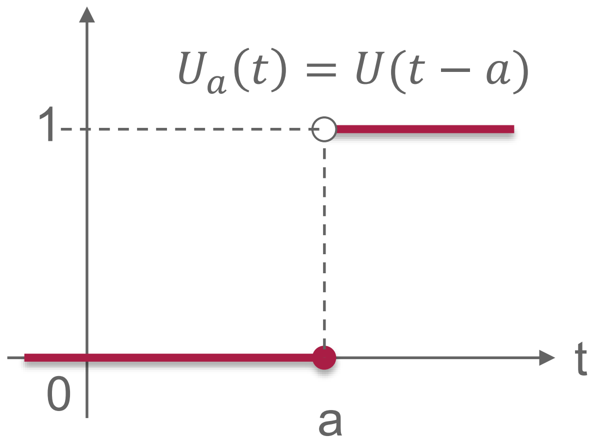
一般に$\sigma < \mathrm{Re}[s]$を満足する領域のsに対して、上式の右辺の積分が収束するようなσが存在する時、ラプラス変換可能であり、そのようなσの条件を**収束条件**と呼ぶ



$f(t) = e^{x}$

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

ラプラス変換：単位関数(ステップ単位関数)

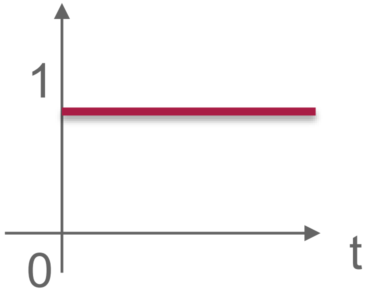


- $U_a(t) = \begin{cases} 0 \ (t \leqq a) \\ 1 \ (a < t) \end{cases}$
- ただし$a \geqq 0$

- $a = 0$のときの$U_0(t)$をU(t)とすると、
- $U_a(t) = U(t-a)$
- と表せて、$U(t-a)$のラプラス変換は、

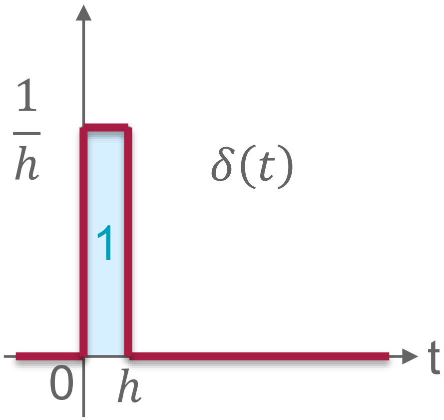
- $\mathcal{L}[U(t-a)]$
  - $= \int_0^\infty e^{-st} U(t-a)dt$
  - $= \int_a^\infty e^{-st} dt$
  - $= \frac{e^{-as}}{s}$

特にa = 0の時は、$\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{s}$



基礎解析学 改訂版 ラプラス変換 単位変換・デルタ関数より

ラプラス変換：単位インパルス関数(デルタ関数)



デルタ関数：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \ (t = 0) \\ 0 \ (t \neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt=1$$

hを0に近づけることで定義される
面積は1である。

次の性質を持つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

デルタ関数のラプラス変換は、1になる

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{0} = 1$$

ただしRe[s]>0

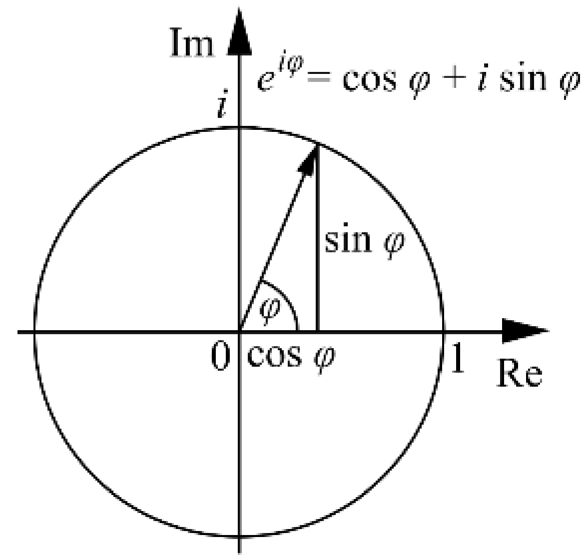
インパルスハンマーと解析システム：小野測器㈱様Webより

オイラーの公式

$e^{j\pi} = -1$
オイラーの等式

$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$
$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$
$\cos\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$
$\sin\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

※ jは虚数



オイラーの公式の導出

$e^{j\theta}$の級数展開は、

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - j\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + j\frac{1}{5!}\theta^5 - \cdot\cdot\cdot$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdot\cdot\cdot) + j(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdot\cdot\cdot)$$

である。また、$\cos\theta$と$\sin\theta$の級数展開、

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdot\cdot\cdot$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdot\cdot\cdot$$

であり、これらを$e^{j\theta}$の右辺に代入することで、

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

を得る。

ラプラス変換：三角関数

オイラーの公式を用いて、

$$\mathcal{L}[sin\omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]) = \frac{1}{2j}(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}) = \underline{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

$$\mathcal{L}[cos\omega t] = \cdot\ \cdot\ \cdot = \underline{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

参考

部分積分を用いても導出できます。

$$\mathcal{L}[sin\omega t] = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty \sin\omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)' dt = \left[\sin\omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega cos\omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt$$

$$= \left[\sin\omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty cos\omega t\, e^{-st} dt = \cdot\ \cdot\ \cdot$$

練習問題2

次のラプラス変換

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} sin\omega t]$$

を求めてみよう

ラプラス変換：初期値の定理と最終値の定理

時間変数の関数x(t)のt=0の時の値を、ラプラス変換後のX(s)から求める

初期値の定理

$$\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

時間変数の関数x(t)のt=∞の時の値を、ラプラス変換後のX(s)から求める

最終値の定理

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

練習問題2の答え

次のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} sin\omega t\right]$$

を求めてみよう

$$\mathcal{L}[sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\mathrm{at}} f(t)] = F(s + a)$$

を用いて、

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right] = F(s - \lambda)$$

$$f(t) = sin\omega t$$

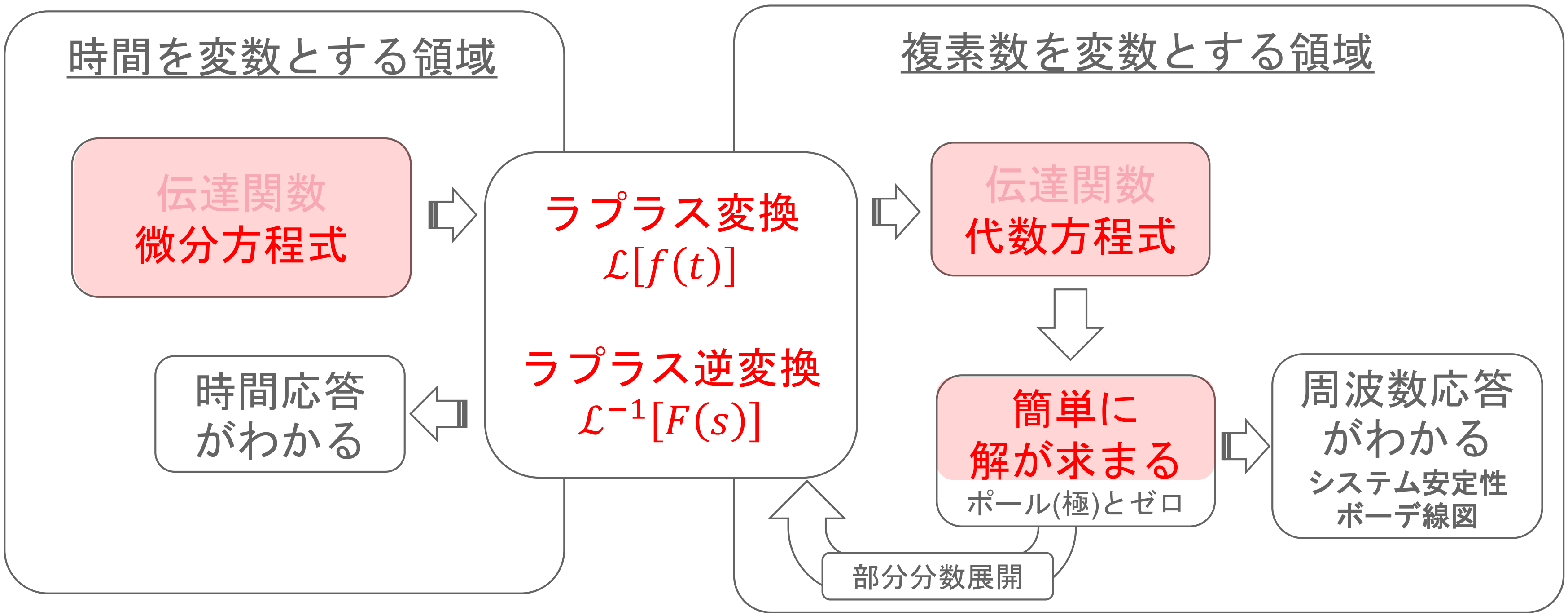
のラプラス変換は、

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

なので、sが$s - \lambda$になり、

$$\therefore \mathcal{L}\left[e^{\lambda t} sin\omega t\right] = \underline{\frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}}$$

微分方程式をラプラス変換を使って解く



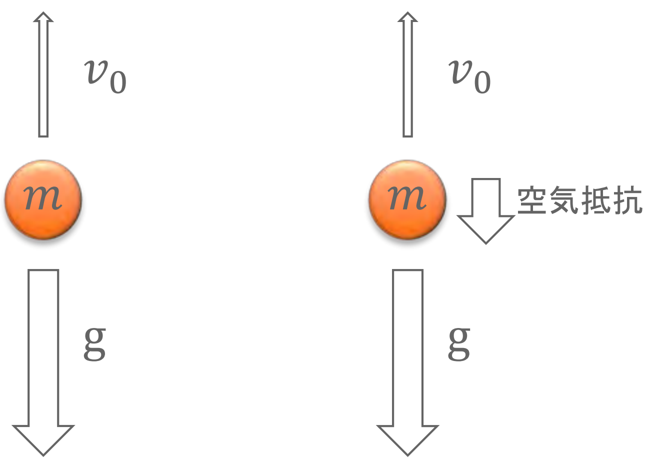
力学で考える微分方程式

時刻$t=0$で速度v_0の質量mボールを投げ上げる場合、その運動の様子は、

速度：$v(t)=v_0-gt,$

位置：$x(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$

と表すことができる。(ニュートンの運動方程式)



さらに、空気抵抗も考慮した場合は、

$$v(t)=-\frac{mg}{k}+(v_0+\frac{mg}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$$

となる。

k:空気抵抗の比例定数

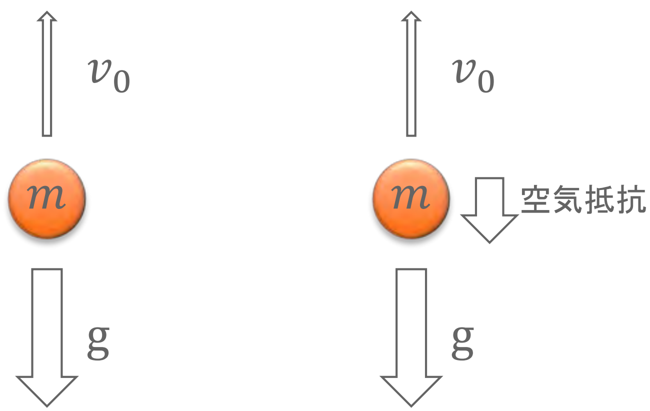
微分方程式とは

事象の「変化」に注目し、その変化量(つまり微分量)の関係を表したもの

前ページの例の場合、

(ボールの)微分方程式：$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -mg \quad -----(1)$

初期条件$v(0) = v_0$において(1)式を解くことで速度$v(t)$を求めることができる



空気抵抗も考慮した場合も、

微分方程式$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -mg - kv$を

初期条件：$v(0) = v_0$において解くことで運動方程式が導かれる。

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + (v_0 + \frac{mg}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$$

微分方程式は、さまざまな関数の変化をパラメータを取り除いて、運動を表現することができる。
しかし微分方程式からは、ただちに運動の様子をグラフなどにして知ることができない。
→微分方程式を解く必要がある

微分方程式を解く

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -mg$ を解く。

m を消して整理

$dv = -g\mathrm{dt}$

両辺を積分する

$$\int dv = -g\int dt$$

$$v(t) = -gt + C$$

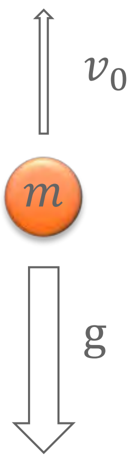
一方、$t = 0$ のとき、

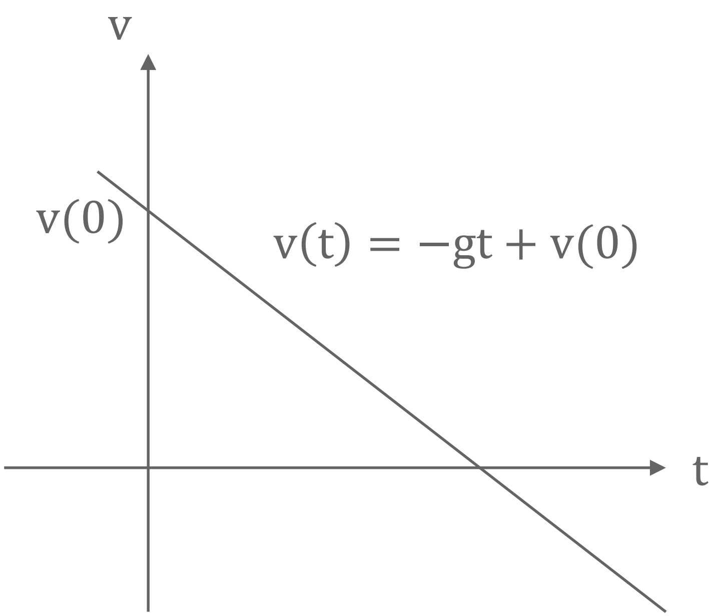
$v(0) = C$

となり、これは初速(v_0)である。

よって、

$v(t) = -gt + v_0$





任意の時間におけるボールの速度がわかるようになった！

空気抵抗有りの場合の微分方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -mg - kv$$

ちょっと面倒そう、、、

微分方程式をラプラス変換を使って解く

$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=-mg$ *をラプラス変換する*

m *を整理*

$$\mathcal{L}\left[\cancel{m}\frac{\mathrm{dv(t)}}{\mathrm{dt}}\right]=\mathcal{L}[-\cancel{m}g]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{dv}(t)}{\mathrm{dt}}\right]=\mathcal{L}[-g]$$

$$(\text{左辺})=\mathrm{sV(s)}-\mathrm{v(0)}$$

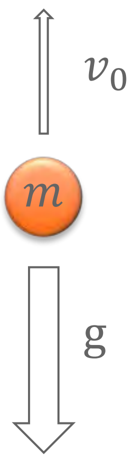
$$(\text{右辺})=-g\frac{1}{s}$$

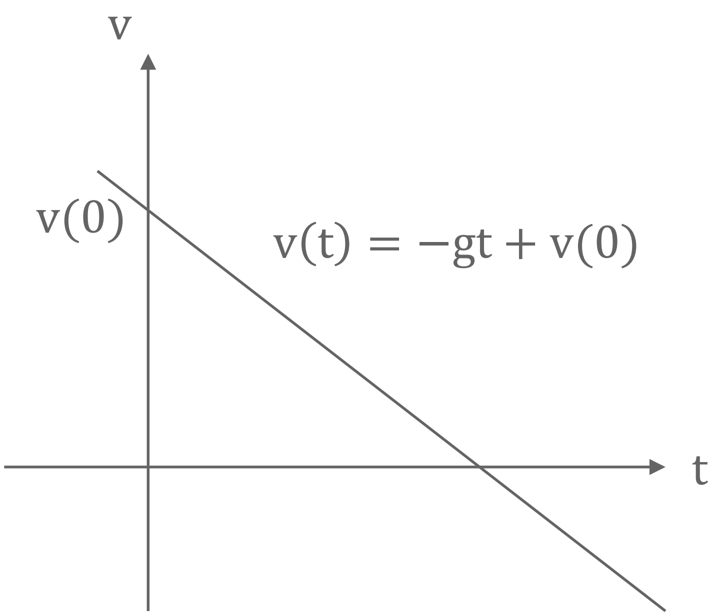
V(s)について解くと、

$$\mathrm{V(s)}=-\frac{g}{s^2}+\frac{\mathrm{v(0)}}{s}$$

上式をラプラス逆変換して、v(t)を求めると、

$$\therefore \quad v(t)=-gt+v_0$$





空気抵抗有りの場合の微分方程式

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=-mg-kv$$

もラプラス変換で簡単計算！

微分方程式を解いてみる(空気抵抗も考慮したケース)

$m\frac{\mathrm{dv}(t)}{\mathrm{dt}} = -mg - kv(t)$ をラプラス変換する

mを整理

$$\mathcal{L}\left[\cancel{m}\frac{\mathrm{dv(t)}}{\mathrm{dt}}\right] = \mathcal{L}\left[-\cancel{m}g - \frac{k}{m}v(t)\right]$$

$$(\text{左辺}) = \mathrm{sV(s)} - \mathrm{v(0)}$$

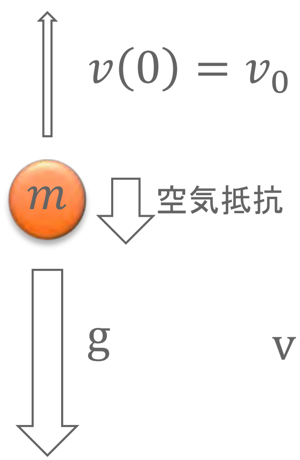
$$(\text{右辺}) = -g\frac{1}{s} - \frac{k}{m}\mathrm{V(s)}$$

V(s)について解くと、

$$\mathrm{V(s)} = \frac{v(0)}{s+\frac{k}{m}} - \frac{g}{s(s+\frac{k}{m})}$$

$\frac{k}{m} = \alpha$とおいて、

$$= v(0)\frac{1}{s+\alpha} - g\frac{1}{s(s+\alpha)}$$



$$V(s) = v(0)\frac{1}{s+\alpha} - \frac{g}{\alpha}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$$

これをラプラス逆変換する

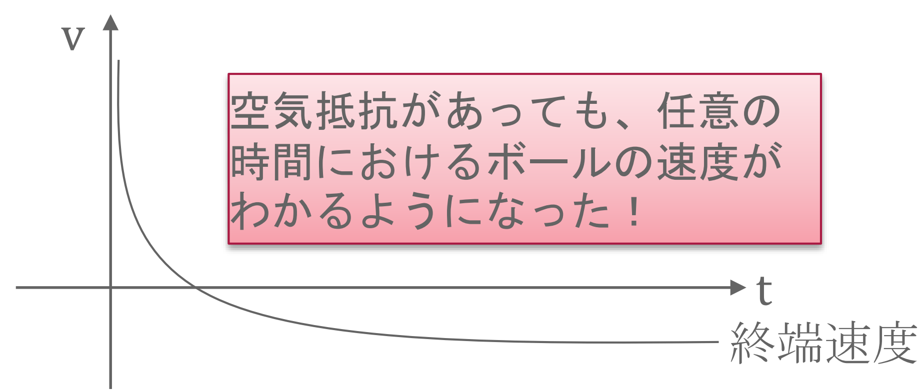
$$v(t) = v(0)e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

整理して、αを戻すと、

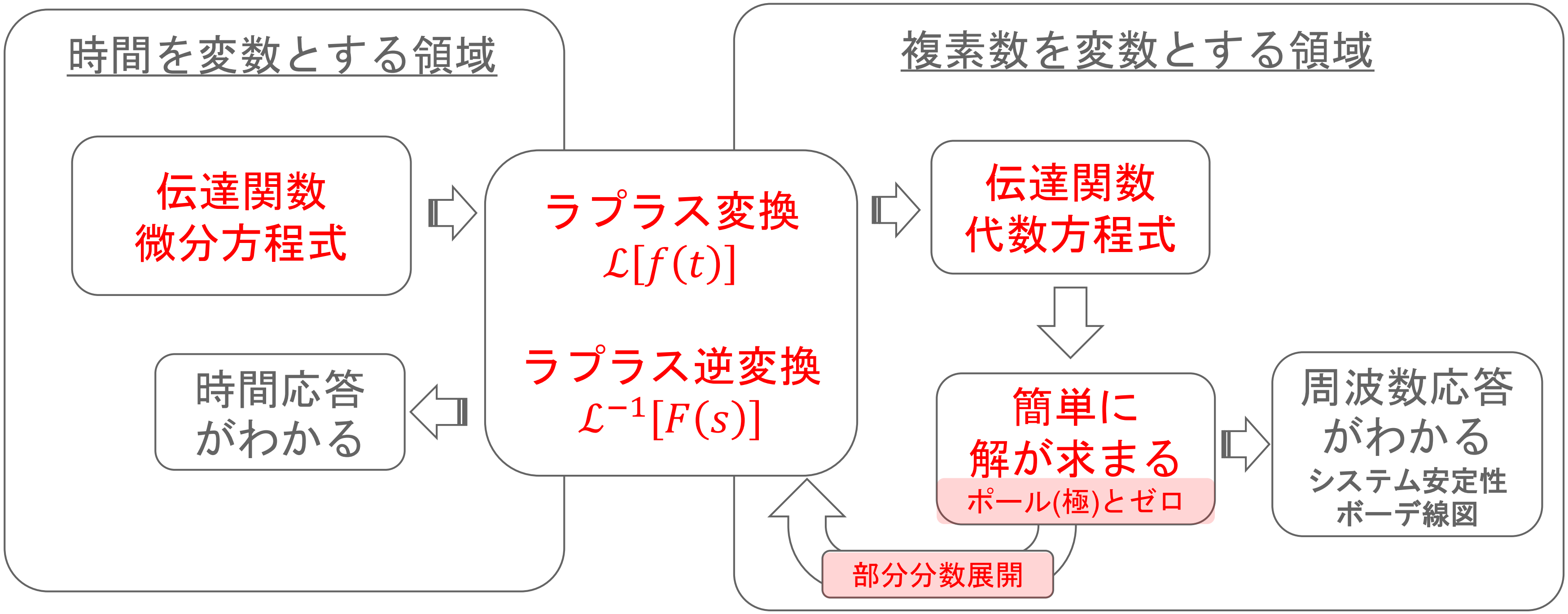
$$= v(0)e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$$

空気抵抗があっても、任意の時間におけるボールの速度がわかるようになった！



部分分数に展開すれば時間関数(応答)がわかる



微分方程式を解いてみる(空気抵抗も考慮したケース)

$m\frac{\mathrm{dv}(t)}{\mathrm{dt}} = -mg - kv(t)$ をラプラス変換する

mを整理

$$\mathcal{L}\left[\cancel{m}\frac{\mathrm{dv(t)}}{\mathrm{dt}}\right] = \mathcal{L}\left[-\cancel{m}g - \frac{k}{m}v(t)\right]$$

$$(\text{左辺}) = \mathrm{sV(s)} - \mathrm{v(0)}$$

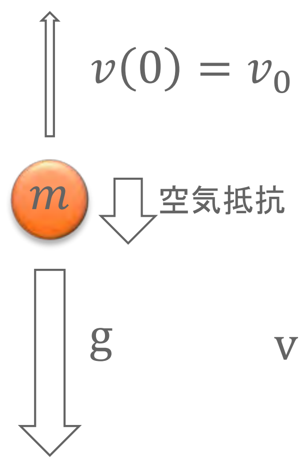
$$(\text{右辺}) = -g\frac{1}{s} - \frac{k}{m}\mathrm{V(s)}$$

V(s)について解くと、

$$\mathrm{V(s)} = \frac{v(0)}{s+\frac{k}{m}} - \frac{g}{s(s+\frac{k}{m})}$$

$\frac{k}{m} = \alpha$とおいて、

$$= v(0)\frac{1}{s+\alpha} - g\frac{1}{s(s+\alpha)}$$



$$V(s) = v(0)\frac{1}{s+\alpha} - \frac{g}{\alpha}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$$

これをラプラス逆変換する

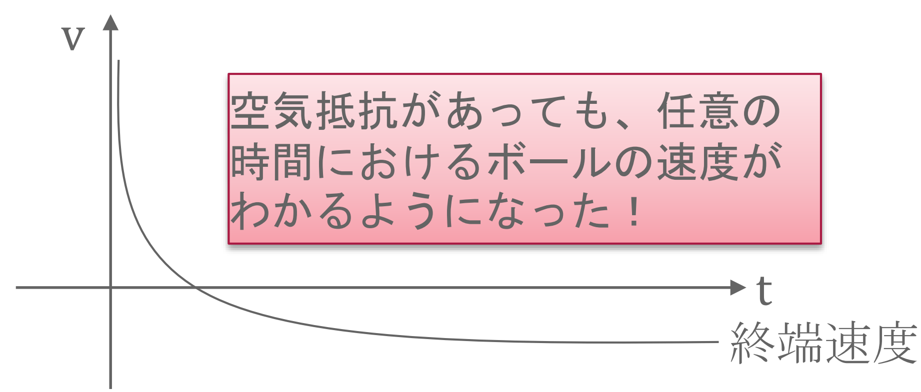
$$v(t) = v(0)e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

整理して、αを戻すと、

$$= v(0)e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$$

空気抵抗があっても、任意の時間におけるボールの速度がわかるようになった！



部分分数への変換(ヘビサイドの展開定理 または目隠し法)

$V(s) = \dfrac{1}{s(s+p)}$ $----(1)$を部分分数に変換したい

分母をゼロにするようなsをポール(または極)と呼ぶ。
(1)式のポールは0と$-p$である

$V(s)$をaとbを使って

$$V(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+p}$$

と置く。ポール0と$-p$を用いてaとbを求める

$$a = sV(s)|_{s=0} = \frac{1}{s+p}|_{s=0} = \frac{1}{p}$$

$$b = (s+p)V(s)|_{s=-p} = \frac{1}{s}|_{s=-p} = \frac{1}{-p}$$

この解法を「ヘビサイドの目隠し法」という

$$\therefore V(s) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+p}\right)$$

部分分数に展開することで、

ラプラス逆変換を使って時間関数に戻すことができるようになる！

練習問題 3

次の関数のポールとゼロを求めてみよう
さらに時間関数に戻してみよう

$$V(s) = \frac{s-1}{s^2+7s}$$

練習問題3の答え

次の関数のポールとゼロを求めてみよう
さらに時間関数に戻してみよう

$$V(s) = \frac{s-1}{s^2+7s}$$

$V(s)$をaとbを使って

$$V(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+7}$$

とする。
ポールは0と-7であるから、
ヘビサイドの目隠し法を用いて、
aとbを求めると、

$$a = sV(s)|_{s=0} = \frac{s-1}{s+7}|_{s=0} = -\frac{1}{7}$$

$$b = (s+7)V(s)|_{s=-7} = \frac{s-1}{s}|_{s=-7} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore V(s) = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{s} - \frac{8}{s+7}\right)$$

さらに時間関数を求める

$$V(s) = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{s} - \frac{8}{s+7}\right)$$

の時間関数は、
以下のラプラス変換の逆変換

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$ ：指数減衰関数

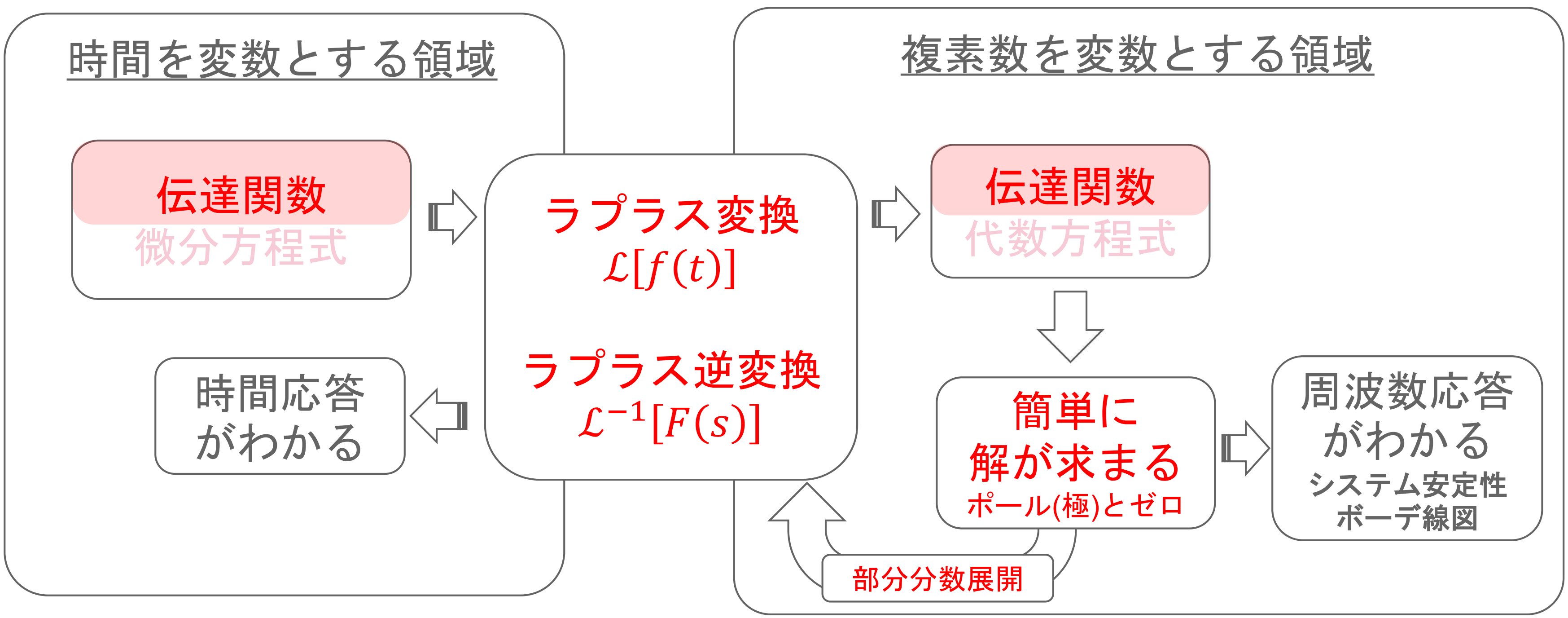
$$\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{s}$$ (a = 0の時のステップ関数)

を用いて、

$$\therefore v(t) = -\frac{1}{7}(1-8e^{-7t})$$

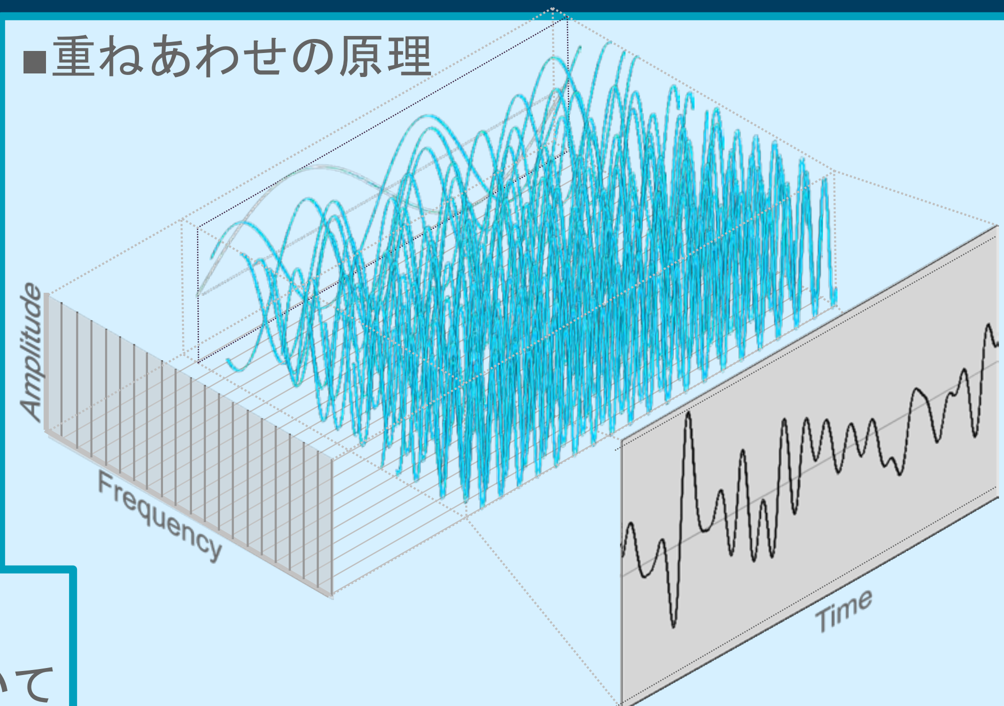
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

伝達関数とラプラス変換



線形システムについてと伝達関数

■重ねあわせの原理



■線形性

入力$f_1(t), f_2(t)$, 出力$g_1(t), g_2(t)$, について

$f_1(t) \rightarrow g_1(t)$

$f_2(t) \rightarrow g_2(t)$

のとき、任意の定数a, bとして、

$$af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow ag_1(t) + bg_2(t)$$

が成り立つ

■時不変

入力$f(t)$, 出力$g(t)$について

$$f(t) \rightarrow g(t)$$

のとき、任意の定数τとして、

$$f(t-\tau) \rightarrow g(t-\tau)$$

が成り立つ

ラプラス変換とシステムの応答

デルタ関数のラプラス変換は、1になる

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = e^0 = 1$$

つまり

$$Y(s) = G(s) \cdot 1$$

Wikipedia 「インパルス応答」より
インパルス応答関数のラプラス変換は、伝達関数として知られている。
(中略)
ラプラス変換されたシステムの出力$Y(s)$は、
複素平面上で**伝達関数$G(s)$と入力関数$X(s)$との積を求める**ことで決定される。
この結果に逆ラプラス変換を施すと、時間領域における出力関数が得られる。

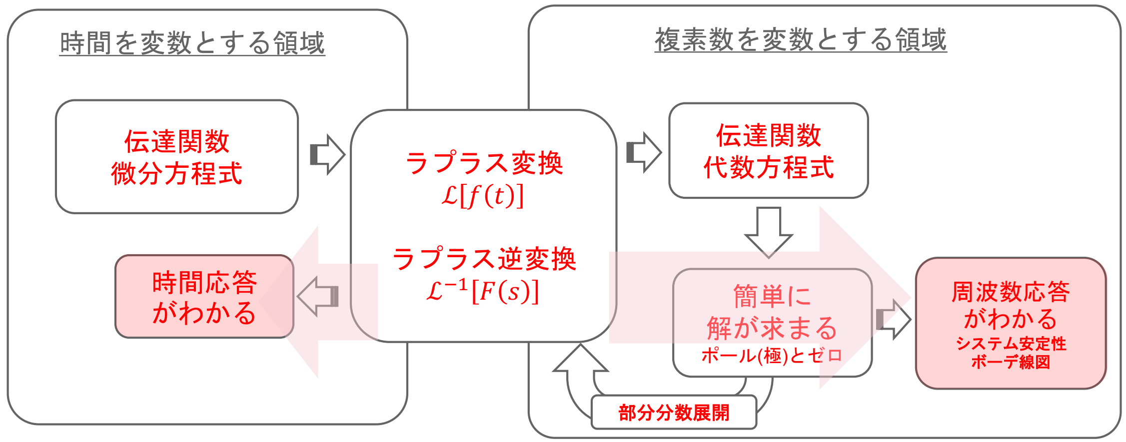
入力 $X(s)$ → 線形システム $G(s)$ → 出力 $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

時間領域で出力関数を直接決定するには、入力関数とインパルス応答関数の畳み込みが必要となる。これには積分が必要となり、周波数領域で2つの関数の単なる積を求めるよりも難しい。

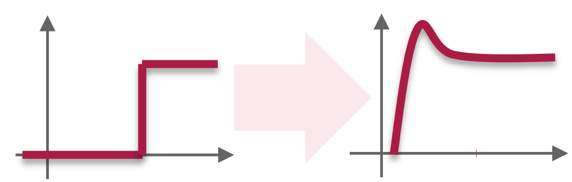
入力 $x(t)$ → 線形システム $g(t)$ → 出力 畳み込み積分

ラプラス変換を使うことで、簡単にシステム解析ができる！

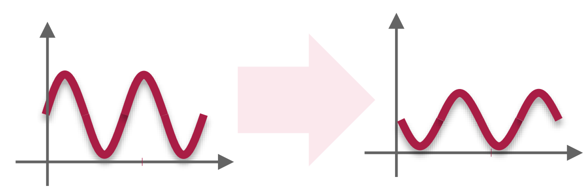
伝達関数(ラプラス変換)から電気回路の応答を考える



- 入力は信号源
  - インパルス
  - ステップ
  - 正弦波
- 時間応答と周波数応答
  - 時間応答（過渡応答）
    - インパルス応答
      - システムの固有の応答を見る場合に使う
        - Ex)インパルスハンマーで叩いた時の音が違う(周波数が違う)ことで内部状態を探る
      - 一瞬のうちにエネルギーを与える(現実には無理)
    - ステップ応答
      - インパルス応答を時間で積分したもの
      - スイッチを入れた後の応答
      - セトリング(オーバーシュートやリンギング)を見る

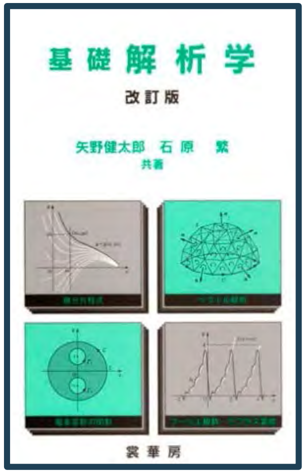


  - 周波数応答(周波数特性)
    - sをjωに替える
    - 入力正弦波に対する出力波形の振幅と位相の変化度合い
      - ポールとゼロ
      - ボーデ線図



前半のまとめ：ラプラス変換と微分方程式 (基礎解析学の一部)

- ラプラス変換
  - t⇔s 変換を行う
  - 必要な公式
    - 三角関数/指数関数の計算
    - オイラーの公式
    - 微積分



- 微分方程式
  - 諸条件に左右されない関数の記述方式
  - ラプラス変換を使うと微分方程式を簡単に解くことができる
    - 部分分数分解と因数分解
      →ヘビサイドの展開定理
- 線形システムとラプラス変換
  - 線形システムはラプラス変換を施した関数で計算すると簡単に解析できる
  - 線形システムの応答
    - 時間応答
    - 周波数応答

チャレンジ・クイズ　その【1】
部分分数展開

つぎの部分分数展開におけるaとbの正しい組み合わせを
1)~3)より選択してください

$$\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}$$

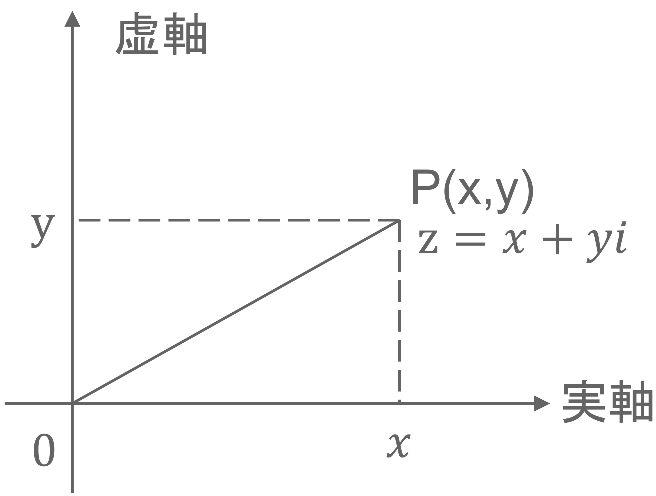
1) $a=-2,\ b=2$
2) $a=1,\quad b=-1$
3) $a=1,\quad b=2$

電気回路で考える

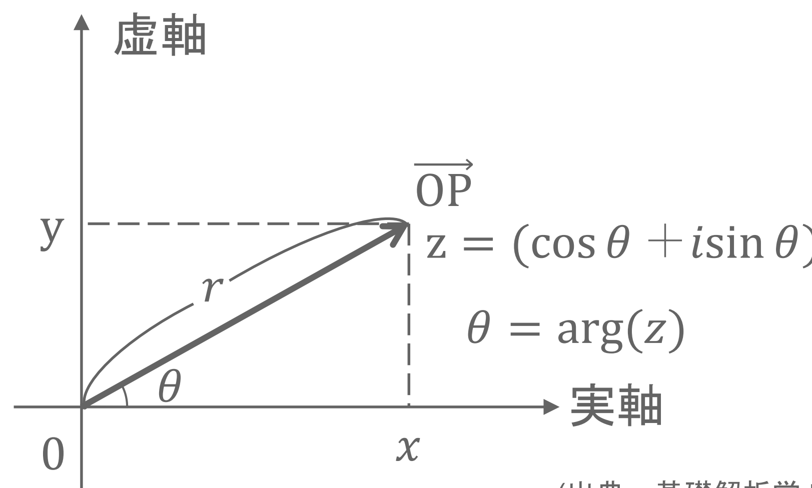
いままでの話を電気回路に適用する

複素数平面

- 複素数
  - $i^2 = -1$となるiを虚数単位とし、実数aとbについて$\alpha = a + bi$を**複素数**とする
- 複素数平面(ガウス平面)
  - 直交座標O-xyの平面上で、**複素数**$z = x + yi$に対して点P(x,y)を対応させ点zとする
  - 複素数$z = x + yi$は、zの絶対値$|z| = r$と、ベクトルと実軸が作る偏角θとを用いて、 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$と表示でき、この右辺を複素数zの極形式と呼ぶ



複素数平面(xy座標)

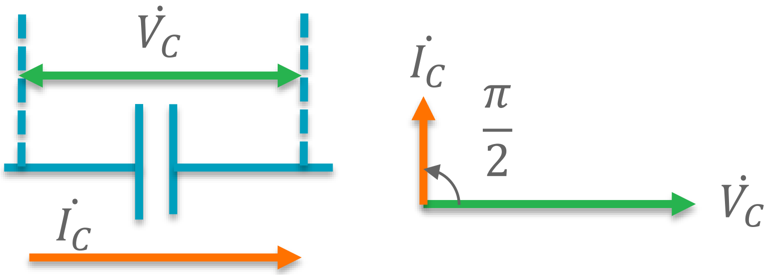


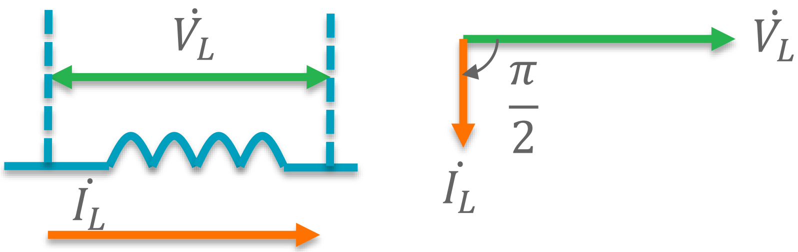
複素数平面(極形式)

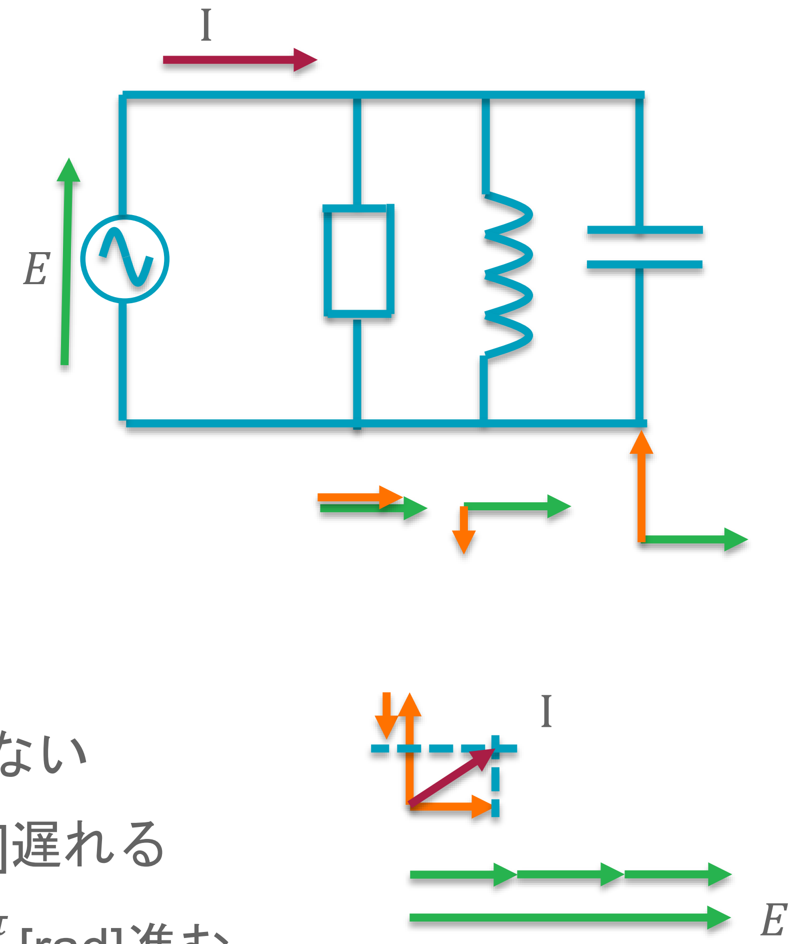
(出典：基礎解析学 裳華房刊)

複素平面を回路解析に適用する
～交流(AC)信号のベクトル解法～

スタインメッツの交流理論(記号法)

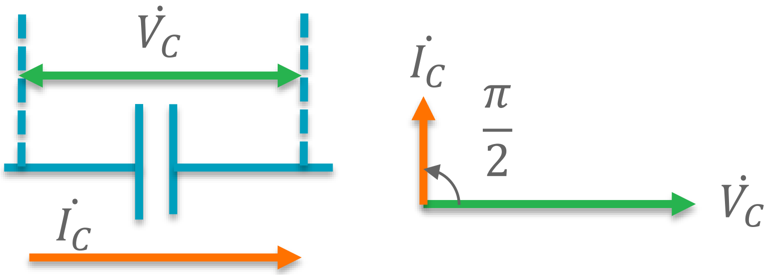


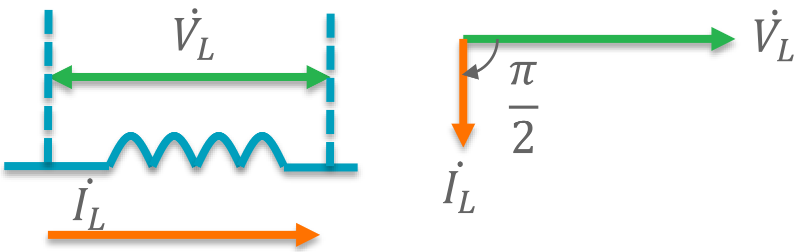


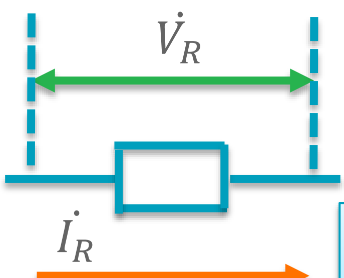


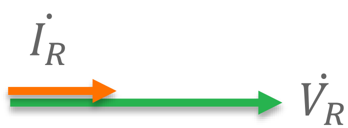
- 抵抗は電流と電圧の位相差は発生しない
- コンデンサは電圧が電流よりも$\frac{\pi}{2}$[rad]遅れる
- インダクタンスは電圧が電流よりも$\frac{\pi}{2}$[rad]進む

AC信号のベクトル表示とオームの法則　インピーダンス：$\dot{Z}=\dfrac{\dot{V}}{\dot{I}}$









容量Cのインピーダンス：

$$\dot{V}_c=\frac{Q}{C}=\frac{1}{C}\int \dot{I}_C\ dt$$

$\dot{I}_c=Ie^{-j2\pi ft}$として、

$$\dot{V}_c=\frac{1}{C}\int Ie^{-j2\pi ft}\,dt=\frac{\dot{I}_C}{j2\pi fC}$$

$$\therefore X_{cap}=\frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C}=\frac{1}{j2\pi fC}=\frac{1}{sC}$$

インダクタンスLのインピーダンス：

$$\dot{V}_L=L\frac{d\dot{I}_L}{dt}$$

$\dot{I}_L=Ie^{-j2\pi ft}$として、

$$\dot{V}_L=L\frac{d\dot{I}_L}{dt}=j2\pi f\dot{I}_L L$$

$$\therefore X_{coil}=\frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L}=j2\pi fL=sL$$

$X_{reg}=\mathrm{R}$

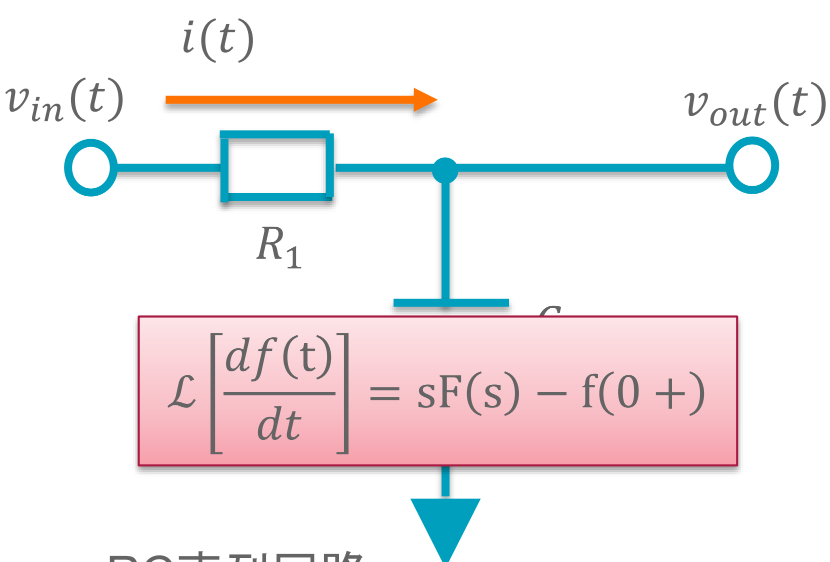
ベクトルで考えると交流信号であっても
オームの法則を適用して考えることができる

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

伝達関数：1次遅れの系(RC直列回路の例)

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

$$V_{out}(s) = G(s) \cdot V_{in}(s)$$



$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0+)$$

RC直列回路
(1次のローパスフィルタ回路)

$$R_1 i(t) + v_{out}(t) = v_{in}(t) \qquad -(1)$$

また、

$$v_{out}(t) = \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

$$v_{cap}(t) = \frac{Q(t)}{C_1} = \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

の両辺をtで微分した、

$$i(t) = C_1 \frac{dv_{out}(t)}{dt}$$

を(1)に代入

$$R_1 C_1 \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = v_{in}(t) \qquad -(2)$$

C_1の初期電圧$v_0(0)=0$として、

(2)をラプラス変換すると、

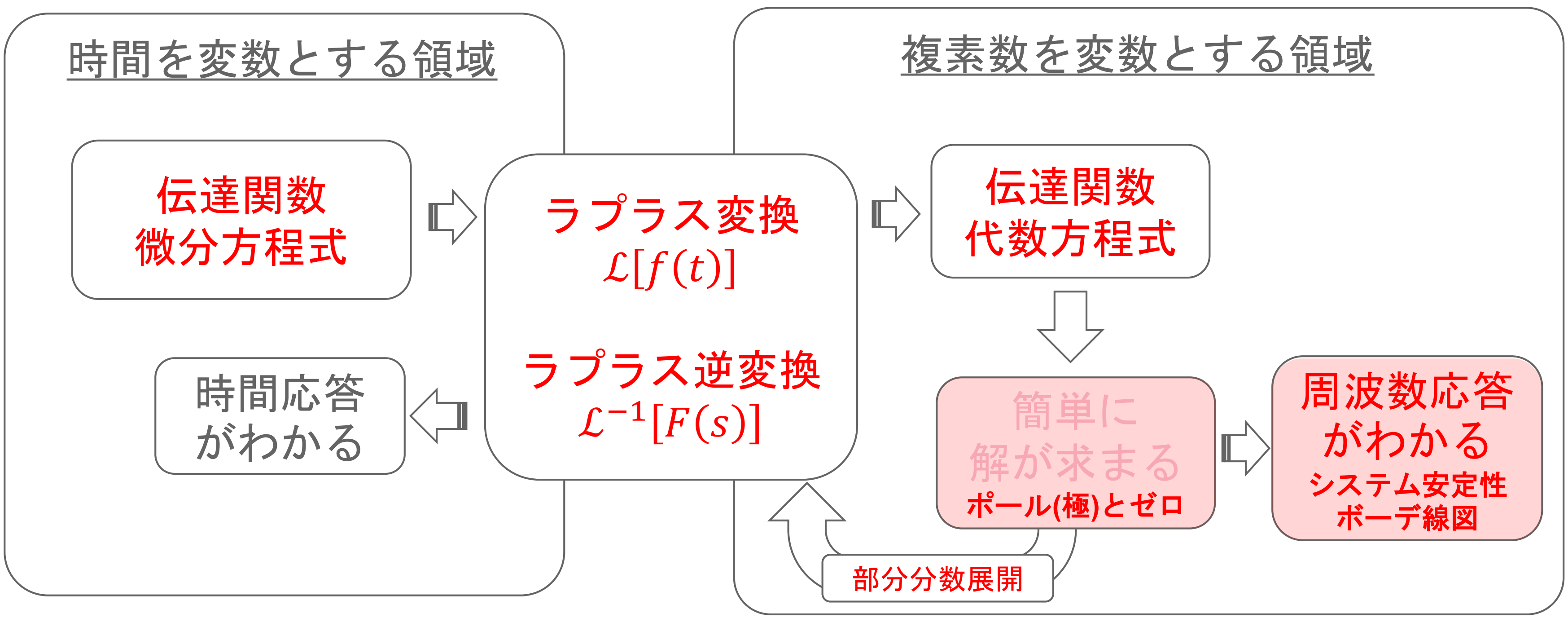
$$(R_1 C_1 s+1)\,V_{out}(s) = V_{in}(s)$$

よって、伝達関数$G(s)$は、

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s+1}$$

この形式を持つ要素を1次遅れの系と呼ぶ

伝達関数から回路解析(周波数応答)



RC直列回路のポールとゼロ
～システムの安定性～

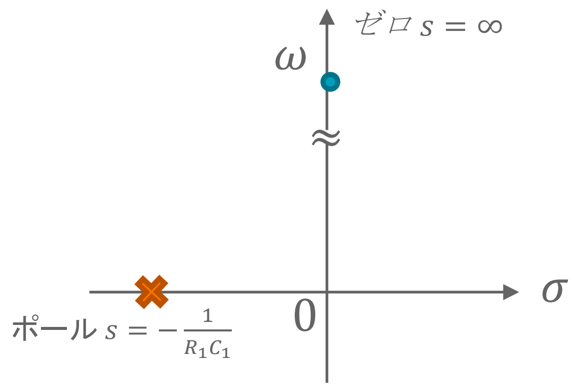
RC直列回路の伝達関数

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R_1C_1s+1}$$

での、ポールとゼロはそれぞれ、

ポール： $s = -\frac{1}{R_1C_1}$ *(このときG(s)は∞になる)*

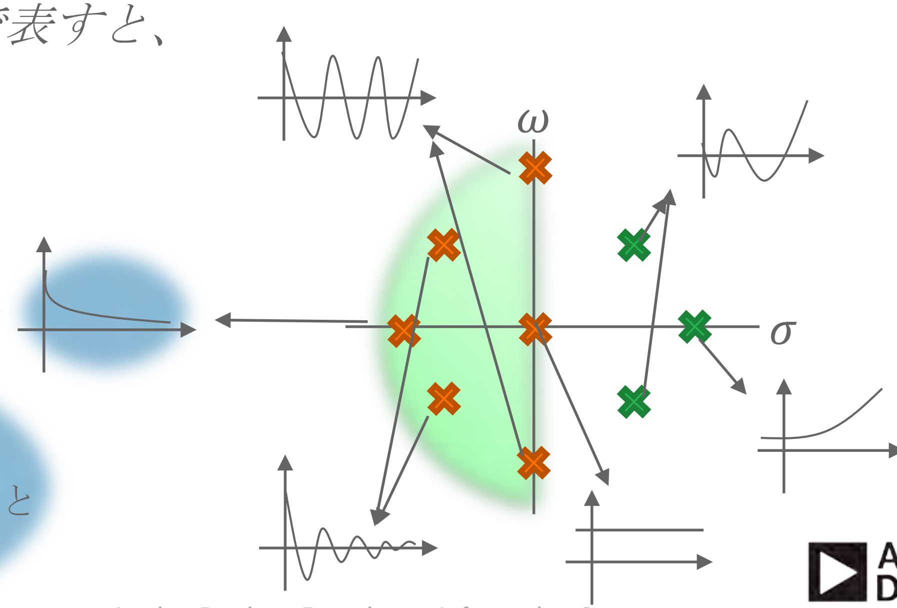
ゼロ：$s = \infty$ (このときG(s)は0になる)



このポールとゼロを複素平面(s平面)で表すと、右図のようになる

システムの安定性の判定法
左半面：安定
右半面：不安定
真ん中：准安定

$G(s) = \frac{1}{s+1}$
を時間関数に戻すと
$g(t) = e^{-at}$



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

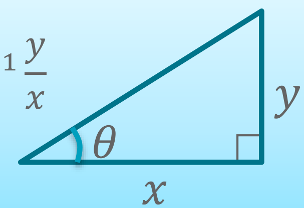
周波数特性
～振幅特性と位相特性はポール~~とゼロ~~からわかる～

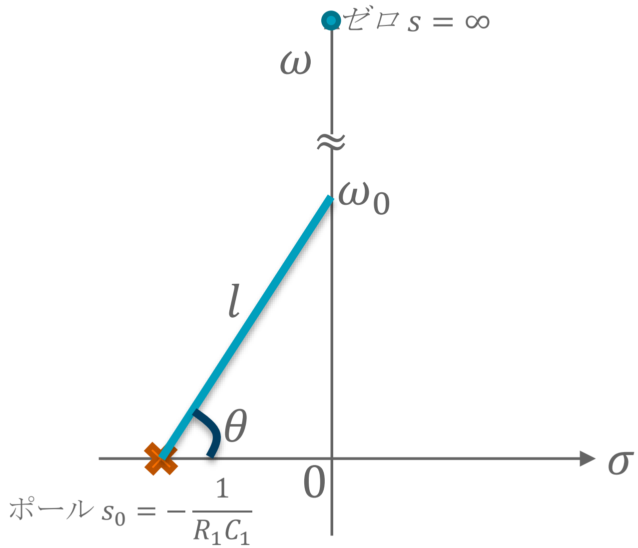
$G(j\omega)$に、ある角周波数ω_0の信号を与えた時、
複素平面(s平面)で、極からω_0まで線を引き、
その長さをl、
実軸との角度をθとすると、

$$l = \sqrt{\left(\frac{1}{R_1C_1}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{1/R_1C_1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$





V_{in}とV_{out}の大きさの比$|G(j\omega_0)|$を振幅特性と呼ぶ

$$|G(j\omega_0)| = \frac{1/R_1C_1}{l}$$

複素数の絶対値:　$z \cdot \tilde{z} = |z|^2$
$\tilde{z}$は共役複素数

V_{in}を基準にしたV_{out}の位相角$\arg G(j\omega_0)$を位相特性と呼ぶ

$$\arg G(j\omega_0) = -\theta$$

P58の参考資料

lはωがゼロの時、最小になる　振幅特性はωの増大で単調減少し、ωが∞でθは$\pi/2$になる

ボーデ線図
～ポールとゼロから作成することができる～

1次遅れ系のボーデ線図

$$G(s)=\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}=\frac{1}{R_1C_1s+1}$$

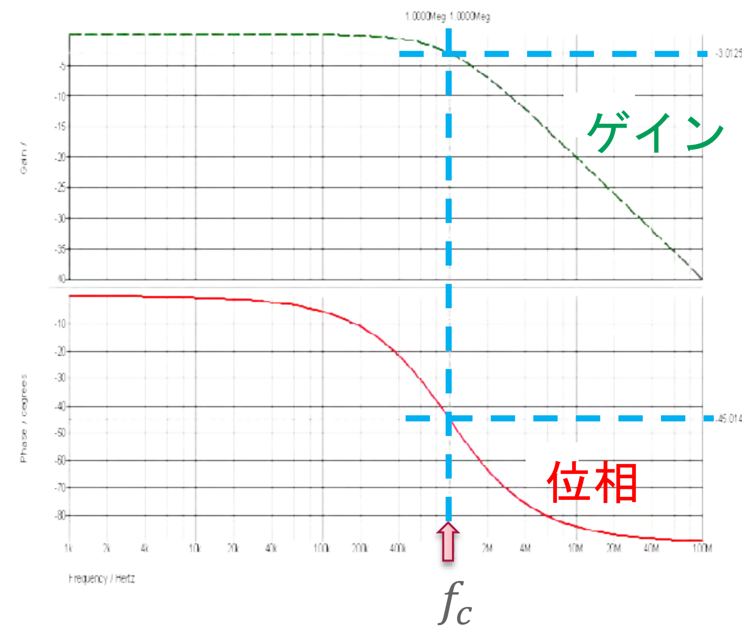
振幅特性

$$|G(j\omega)|=\frac{{}^{1}/_{R_1C_1}}{l}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}}$$

$$\therefore \mathrm{g}(\omega)=20\log_{10}|G(j\omega)|=-20\log_{10}\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}$$

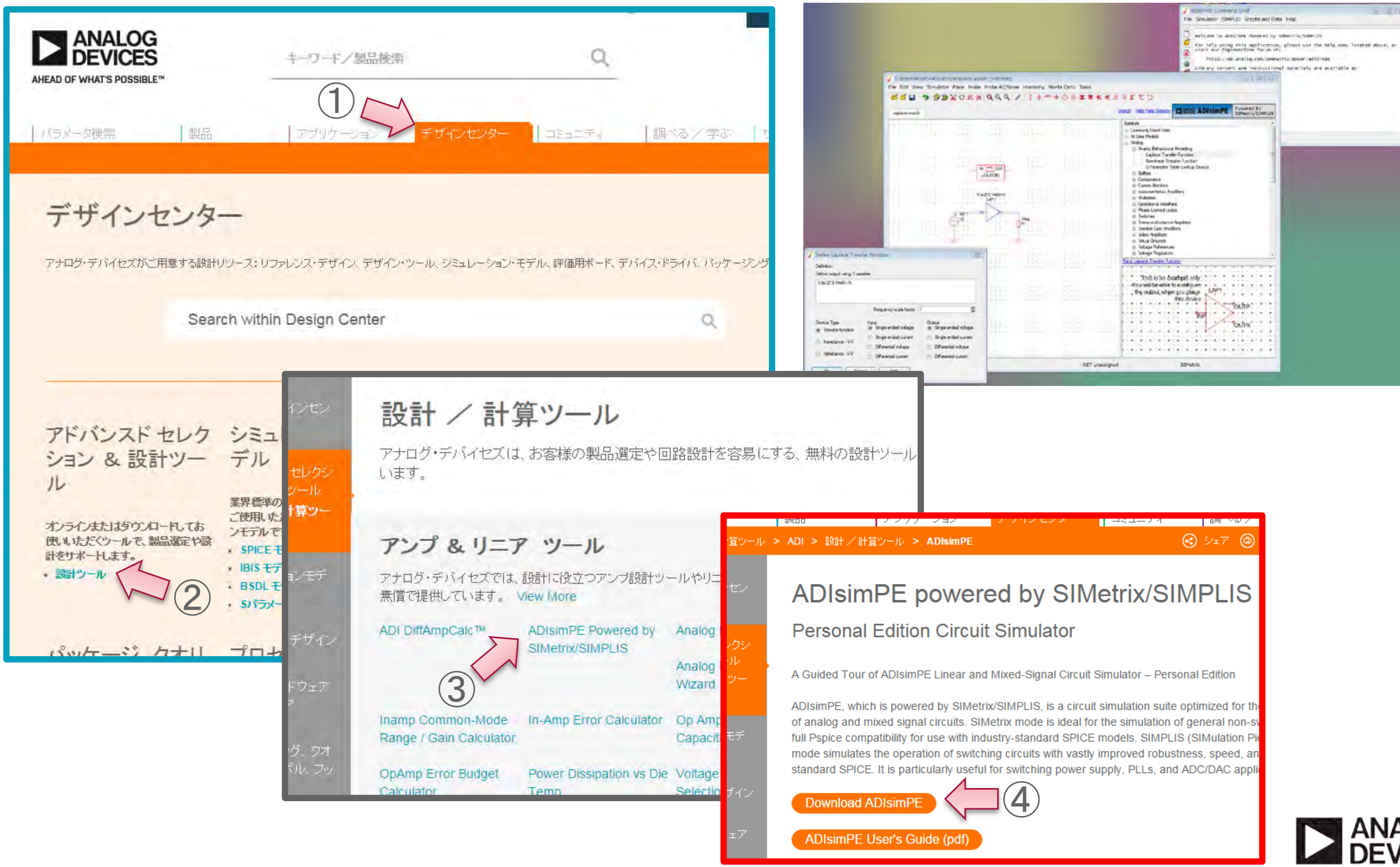
位相特性

$$argG(j\omega)=-\theta=-\tan^{-1}\frac{\omega}{{}^{1}/_{R_1C_1}}$$



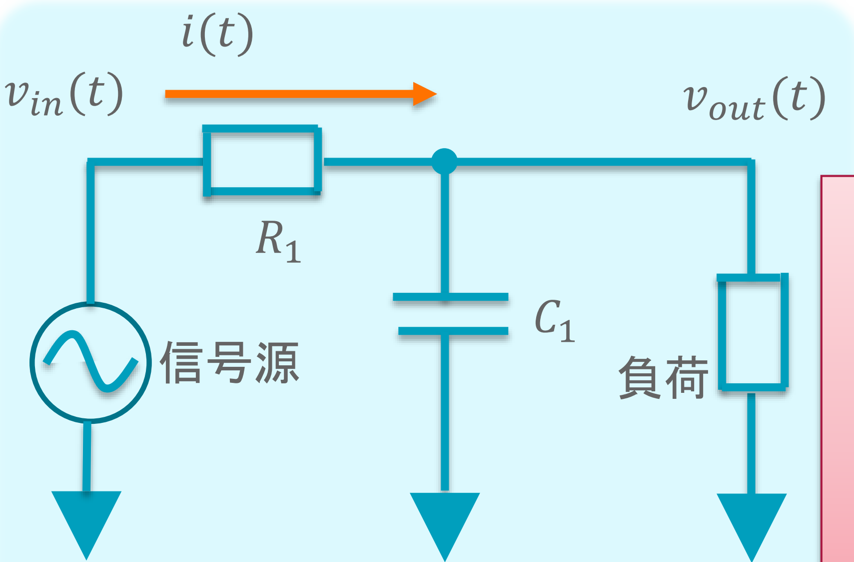
- 周波数の伝達関数を横軸を角周波数ω(数目盛)、縦軸を以下の2軸で作成
- 利得も位相も加減算で表すことができる
  - 利得：$\mathrm{g}(\omega)=20\log_{10}|G(j\omega)|$　単位dB
  - 位相角度：$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)$　単位deg

回路シミュレータでボーデ線図を見る
～アナログ・デバイセズの無料アナログ回路シミュレータ ADIsimPE ～

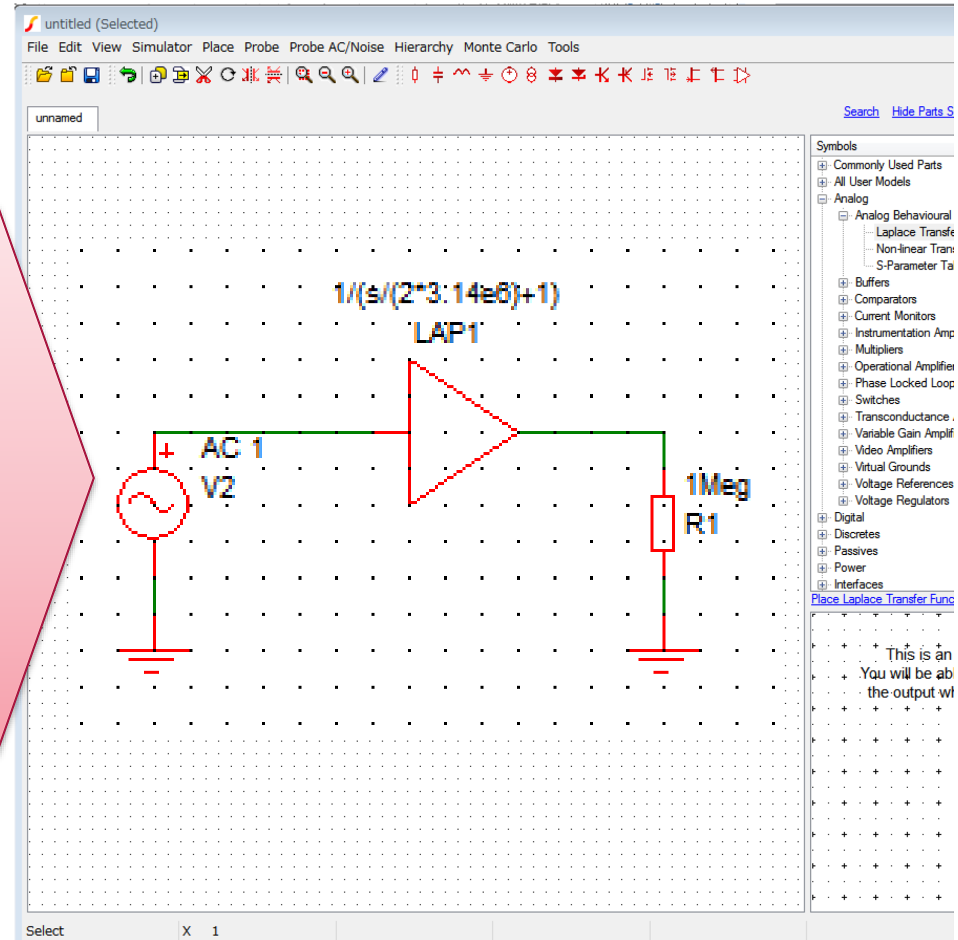


ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

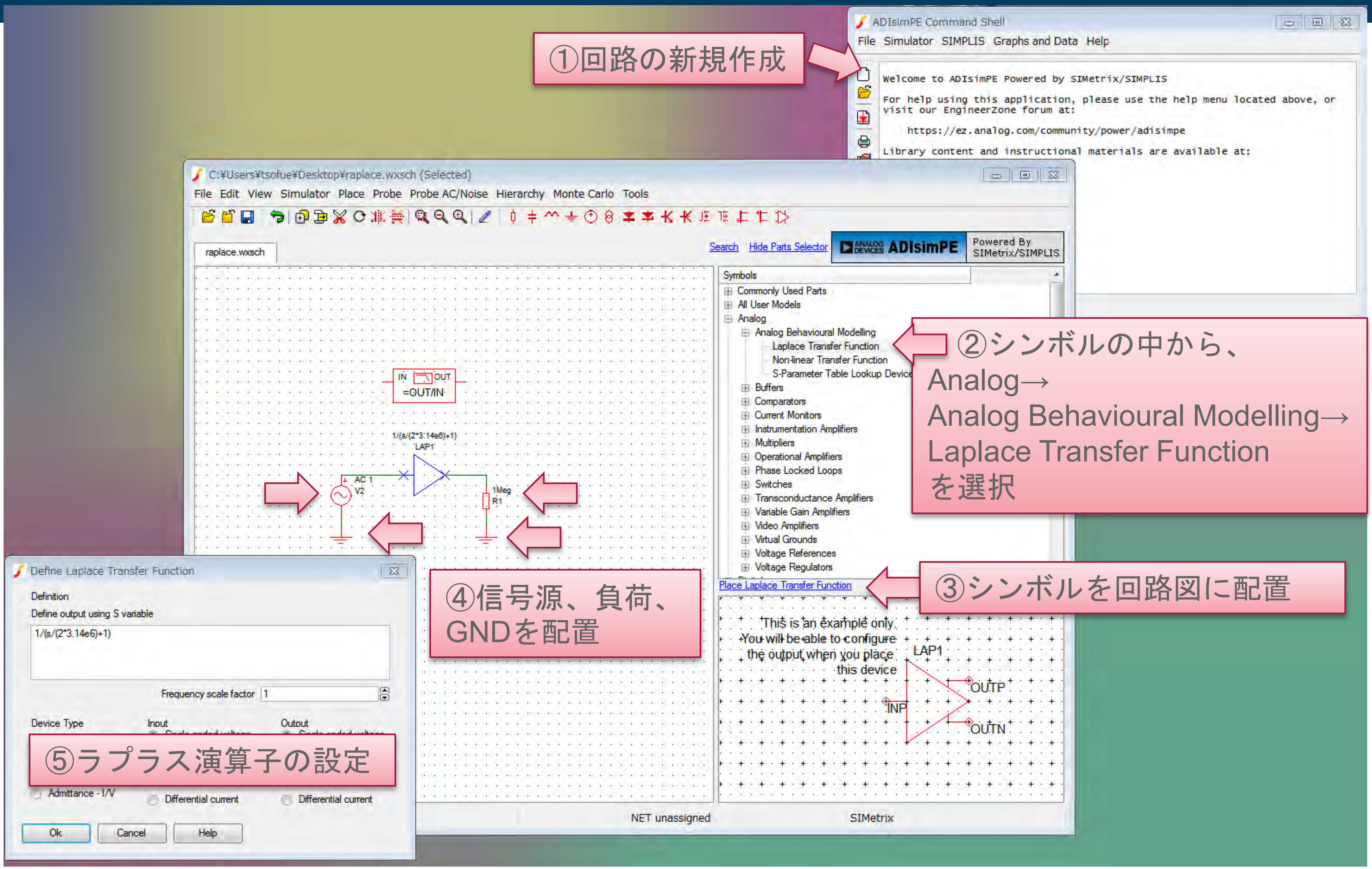
ラプラス演算素子によるRC直列回路(LPF)



RC直列回路
(1次のローパスフィルタ回路)



ラプラス演算素子による回路図の作成



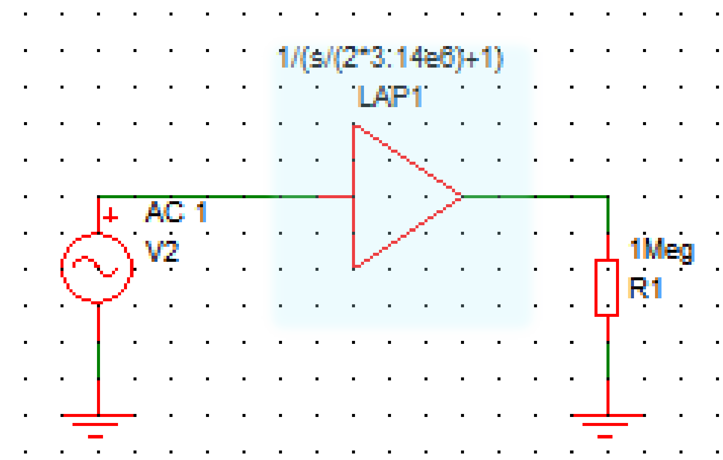
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

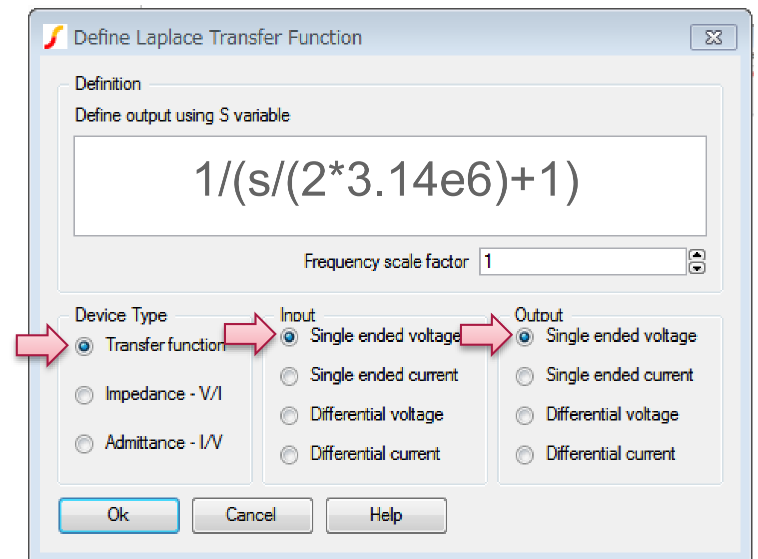
ラプラス演算子の設定

時定数RCの設定は、
1MHzをカットオフ周波数f_cとして

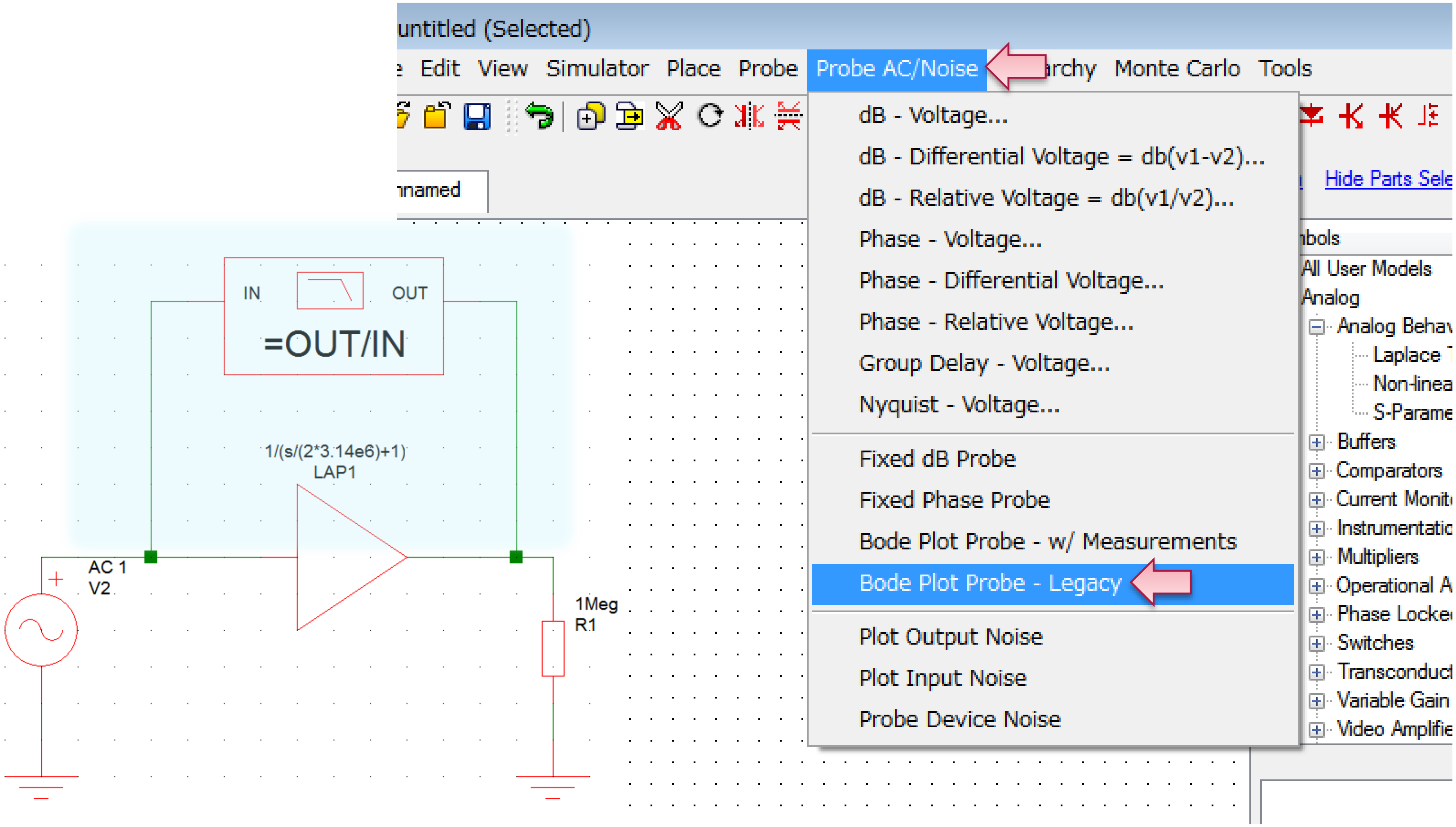
$$RC = \frac{1}{2\pi f_c}$$

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 s+1} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi f_c}s+1}$$





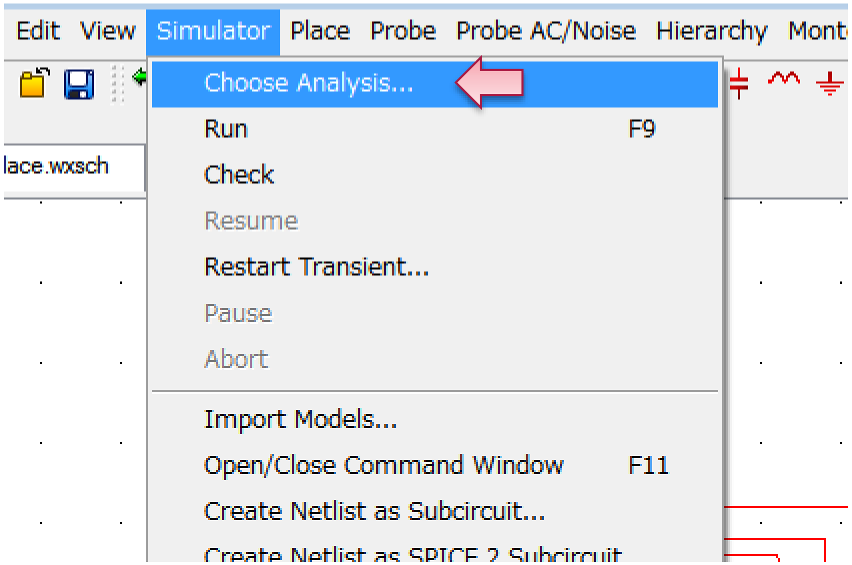
ボーデ・プロッタを配置する

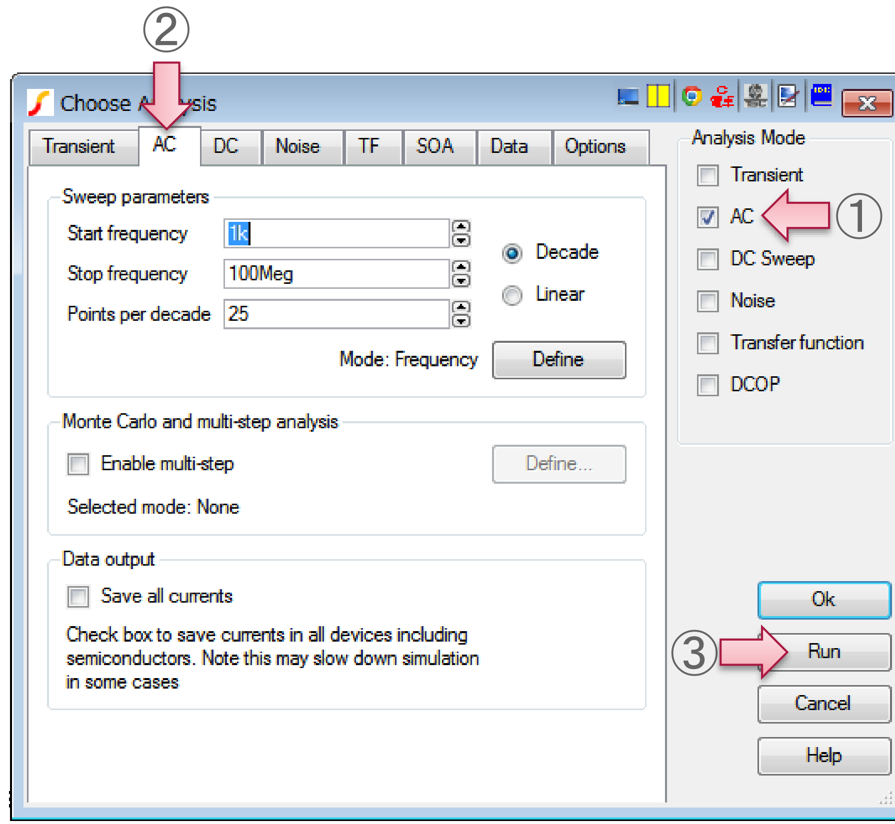


Probe AC/Noise ツールバーからBode Plotter Legacyを選択して配置
ラプラス演算素子にプロービング(接続)する

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

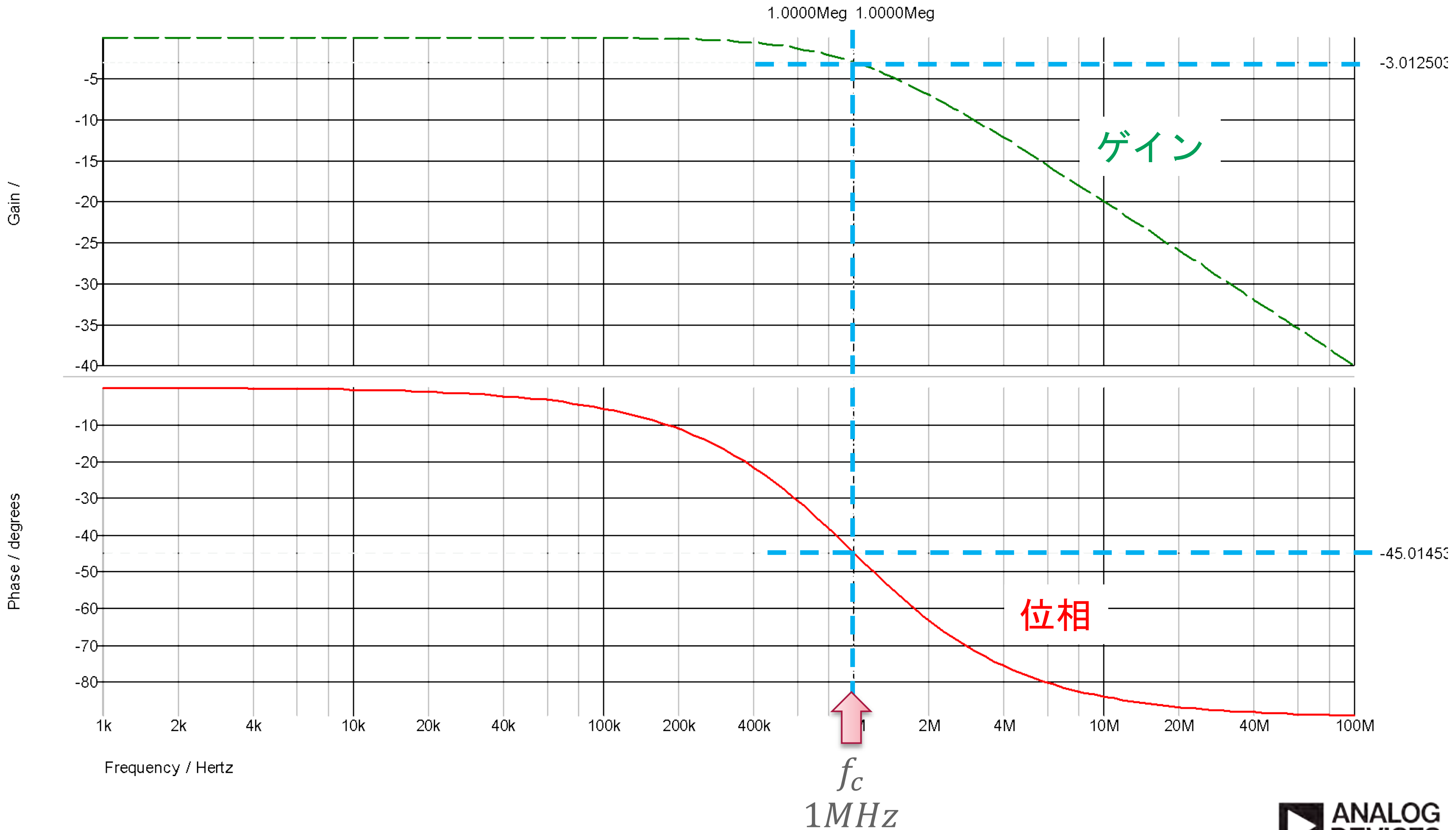
シミュレータの設定と実行





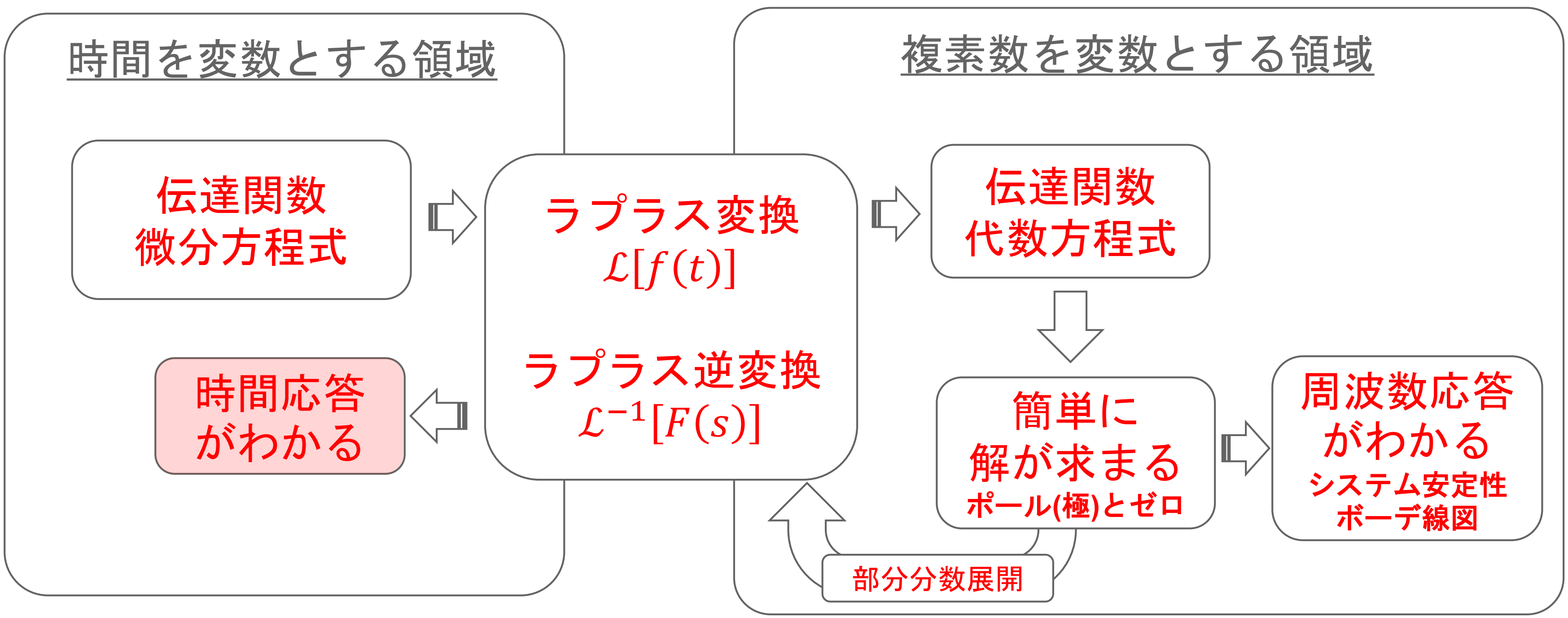
①Analysis ModeはAC(解析)にチェック
②「AC」タブで右図のように設定
③「Run」でシミュレーションスタート

シミュレーション結果



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

伝達関数から回路解析(時間応答)

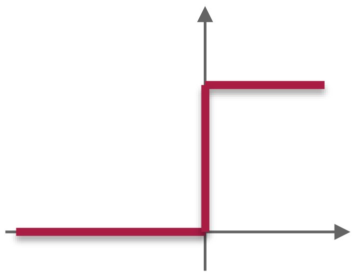


RC直列回路の時間応答を調べる

RC直列回路の伝達関数

$$G(s)=\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}=\frac{1}{R_1C_1s+1}$$

にステップ信号$x(t)$を加えたときの時間応答を調べる



ステップ信号(電圧の大きさは1Vとする)のラプラス変換は

$$X(s)=\frac{1}{s}$$

なので、

$$Y(s)=G(s)\cdot X(s),\ V_{out}(s)=G(s)\cdot V_{in}(s)$$

より、RC直列回路にステップ信号を加えた出力は

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

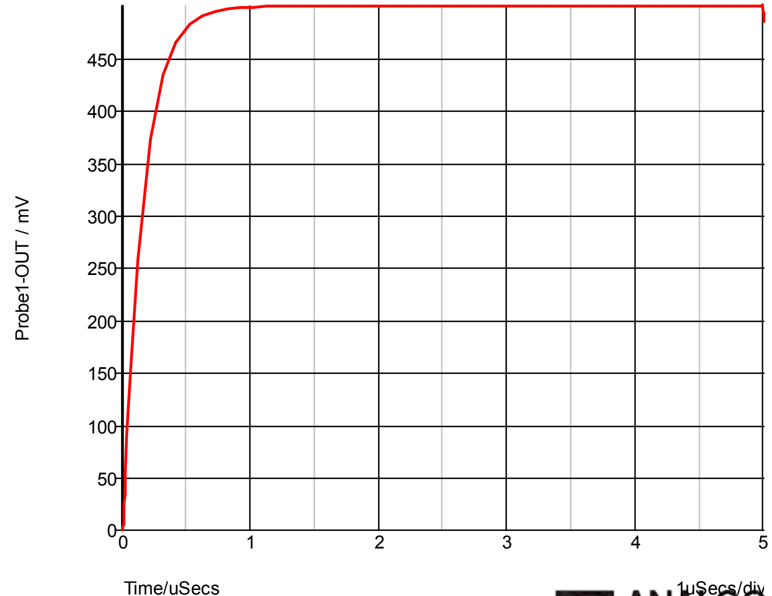
$$=\frac{1}{s(R_1C_1s+1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{R_1C_1s+1}$$

としてaとbを求め、整理すると、

$$Y(s)=V_{out}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{R_1C_1}}$$

ラプラス逆変換で時間関数に戻すと

$$\underline{v_{out}(t)=1-e^{-2\pi f_c t}}$$



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

関連デモ展示のご案内

高千穂交易様展示ブース

高千穂交易株式会社
TAKACHIHO KOHEKI CO.,LTD.

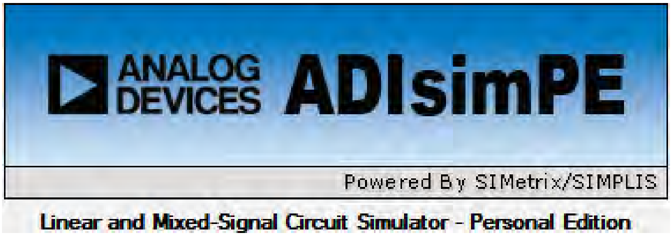
アクティブ・フィルタ ～シミュレーションと実際の違い～

概要

高精度OPアンプであるADA4522-2（ゼロドリフトOPアンプ）を使用してアクティブ・フィルタ回路を構成し、実動作波形を展示します。また、ADIのサイトより無償でダウンロード出来るADIsimPEというシミュレーターを用いてシミュレーションを実施し、実動作波形と比較します。
シミュレーション結果と実動作波形を比較していただくことで、シミュレーションの重要性及びADIsimPEの利便性を実感していただきます

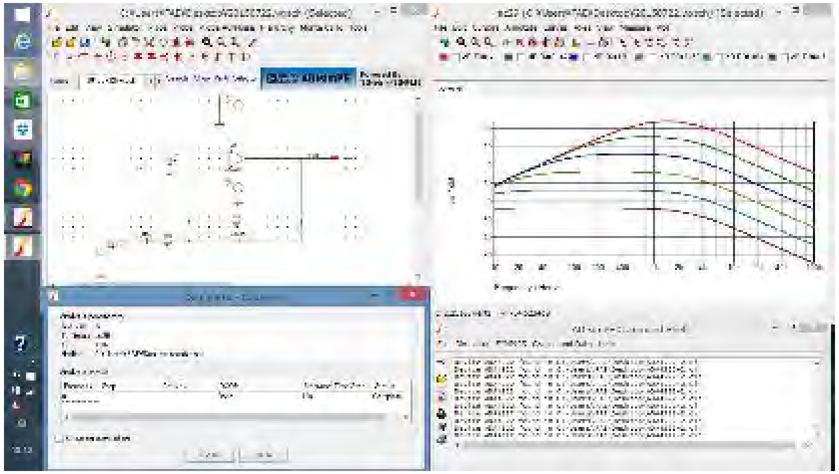
特長

ADIsimPEの特長として高速処理が挙げられ、
①Spiceの10-50倍の速度で計算
②過渡解析の開始状態からシミュレートすることなく、スイッチングの定常状態の動作点を素早く見つけ出す
ことにより、開発時のイライラを解消します。
またADIはモデルのリリースが早いため、最新デバイスにおいても安心してご使用いただけます。今回デモで使用するデバイスも、最新のイチオシであるADA4522-2でご覧頂けます。
デモでは数種類の回路で実基板との比較を見ていただきます。



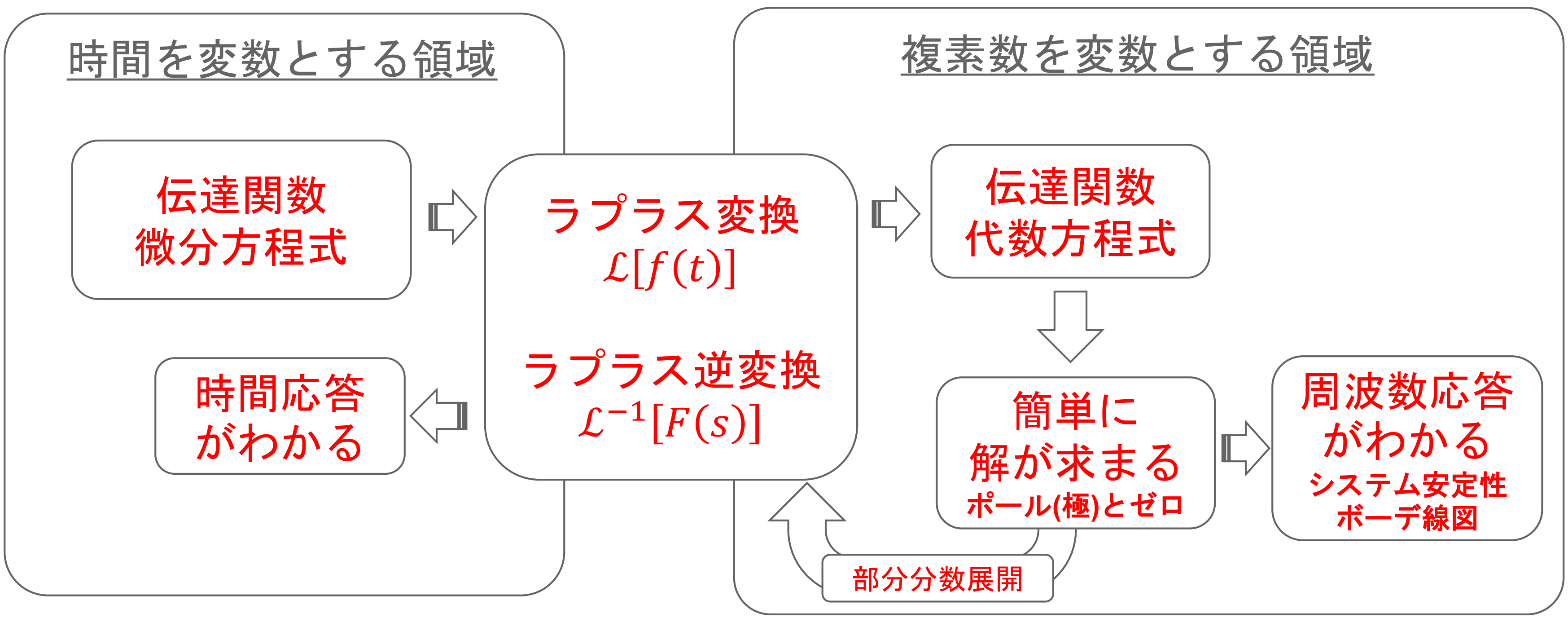
ADIsimPE画面

- メイン画面
- Simulator
- Command Shell
- 波形画面



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

全体のまとめ



時間を変数とする領域
伝達関数
微分方程式
時間応答
がわかる
ラプラス変換
$\mathcal{L}[f(t)]$
ラプラス逆変換
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
複素数を変数とする領域
伝達関数
代数方程式
簡単に
解が求まる
ポール(極)とゼロ
周波数応答
がわかる
システム安定性
ボーデ線図
部分分数展開

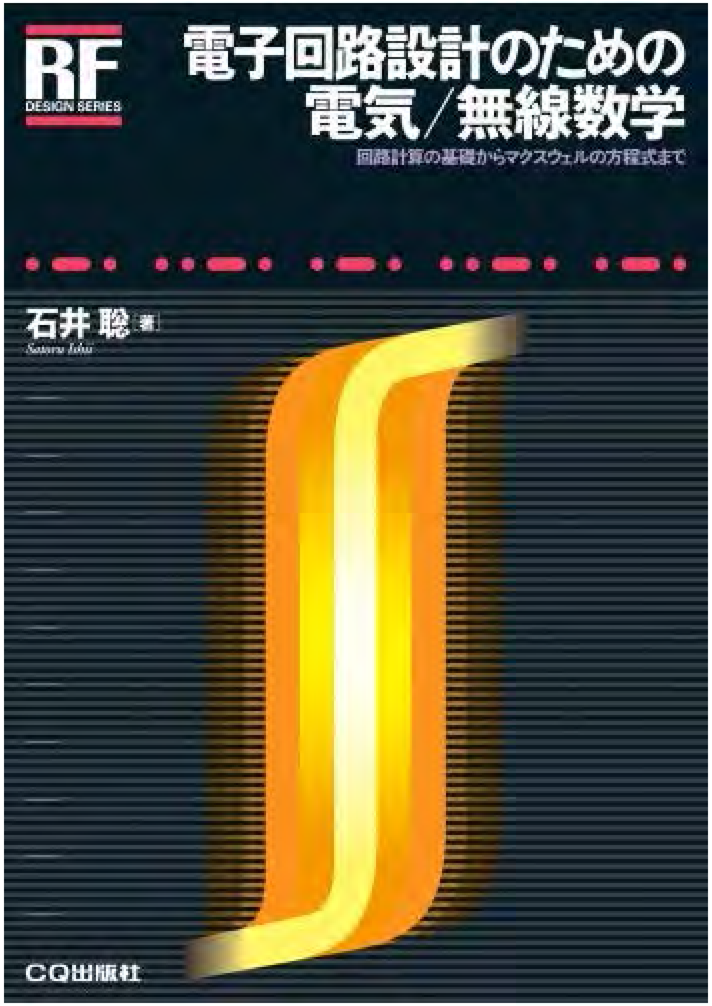
チャレンジ・クイズ　その【2】
ポールとゼロとシステムの安定判別

つぎのシステム関数のポールとゼロの安定性の正しい組み合わせを
1)~3)より選択してください

$$\mathrm{F(S)} = \frac{\mathrm{s}-1}{s^2+7s}$$

1) *ポール 0、7、ゼロ 1、システムは不安定*
2) *ポール 0、-7、ゼロ 1、システムは準安定*
3) *ポール 0、7、ゼロ 1、システムは準安定*

参考書籍


RF
DESIGN SERIES
電子回路設計のための
電気/無線数学
回路計算の基礎からマクスウェルの方程式まで
石井 聡 著
Satoru Ishii
CQ出版社


演習で学ぶ
基礎制御工学
新装版
森 泰親 著
森北出版株式会社

(参考資料)ヘビサイドの展開定理(ヘビサイドの目隠し法)

$$V(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)}$$

の部分分数変換を一般化すると

$$V(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}$$

は、 根である複素数、z(ゼロ)、 p(ポール)を用いて、

$$V(s) = H\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ \cdots (s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\ \cdots (s-p_n)}$$

と表現でき、さらに、

$$V(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

$K_i = [(s-p_i)N(s)]_{s=p_i},\ i = 0,1,2,,,,n$

Kを留数と呼ぶ。

ヘビサイドの展開定理

時間関数への変換は、

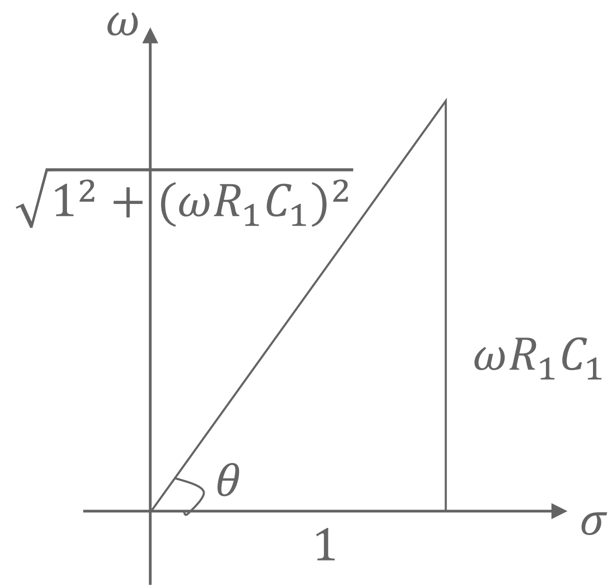
$v(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t},\ t \geq 0$

つまりポールが求まると、時間関数へ逆変換できる

(参考資料) p40, 41の“- θ”の導出

$$G(s)=\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}=\frac{1}{R_1C_1s+1}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{{}^{1}/_{R_1C_1}}{l}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}}$$



$$\frac{G(j\omega)}{|G(j\omega)|}=\frac{\dfrac{1}{R_1C_1s+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}}+j\dfrac{\omega R_1C_1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}}}=e^{j\propto}$$

ところで、

$$e^{-j\propto}=\cos\theta\ +j\sin\theta\ =e^{j\theta}$$

であるから、

$$\propto=\arg G(j\omega)=-\theta$$

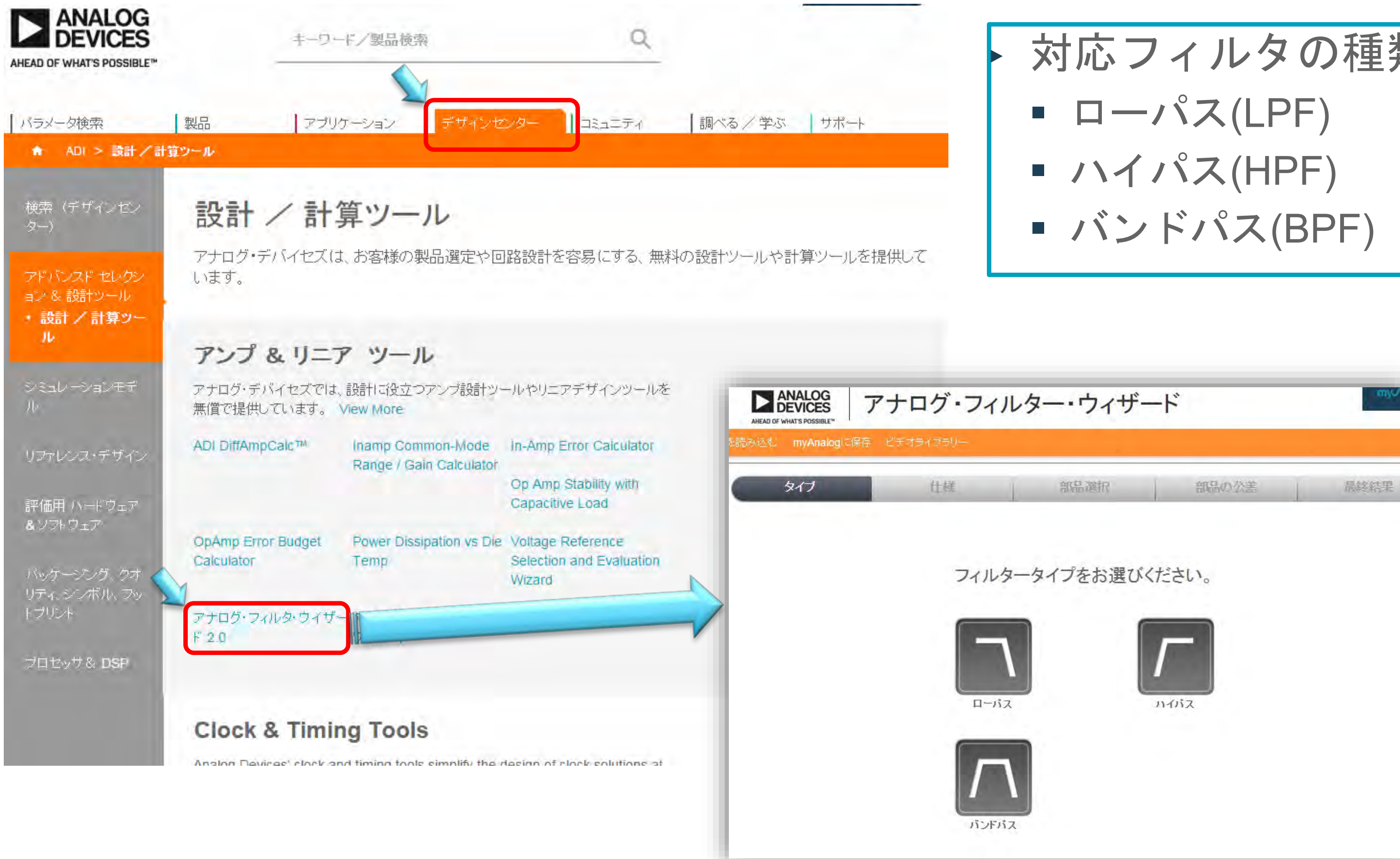
(参考資料)：フィルタの特性評価とラプラス変換

- フィルタの特性評価
  - 周波数領域での応答特性
    - ボーデ線図
      - フィルタの位相とゲイン特性
      - 発振
  - 時間領域での応答特性
    - トランジェント(過渡)応答(インパルス応答とステップ応答)
      - どちらも理想的な信号で、数学的に厳密に計算可能
      - 現実と完全一致することはないが、有用な手がかりにはなる
    - インパルス応答(ラプラス変換では1)
    - ステップ応答(ラプラス変換では1/s)
      - 重要パラメータ：
        - オーバーシュート：なるべく小さくする
        - リンギング：なるべく早く消えるようにする(次パルスへの影響をできるだけ小さくする)
      - インパルス応答を時間で積分したもの
      - 立ち上がり時間の傾きは、インパルス応答のピーク値と等しい

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

参考資料
アナログ・デバイセズの
オンライン設計支援ツール
アナログ・フィルタ・ウィザード

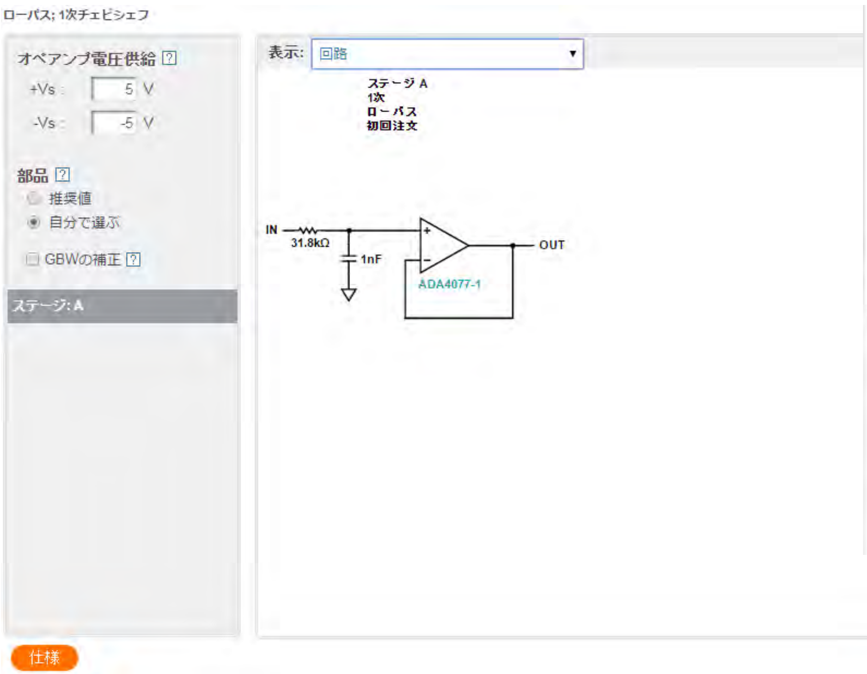
アナログ・フィルタ設計支援ツール
アナログ・フィルタ・ウィザード2.0

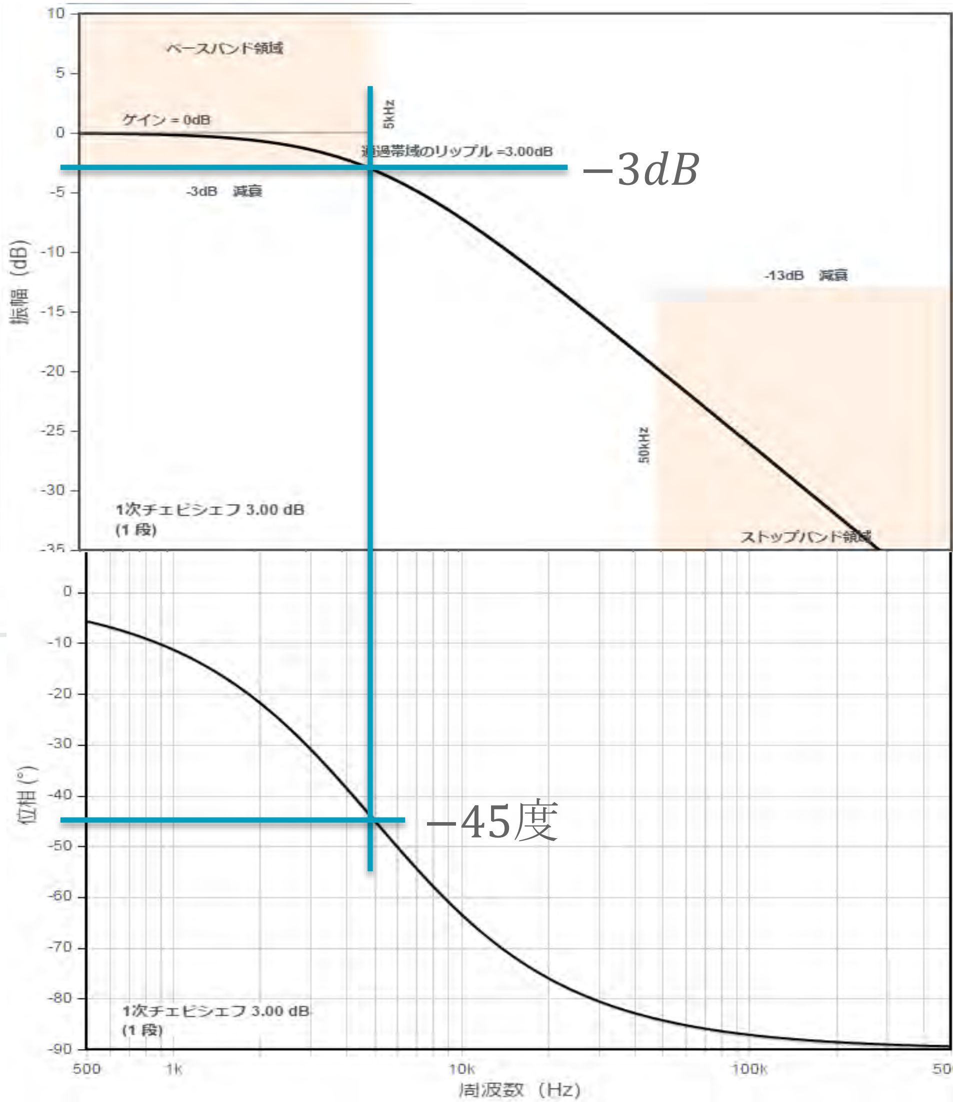


対応フィルタの種類
- ローパス(LPF)
- ハイパス(HPF)
- バンドパス(BPF)

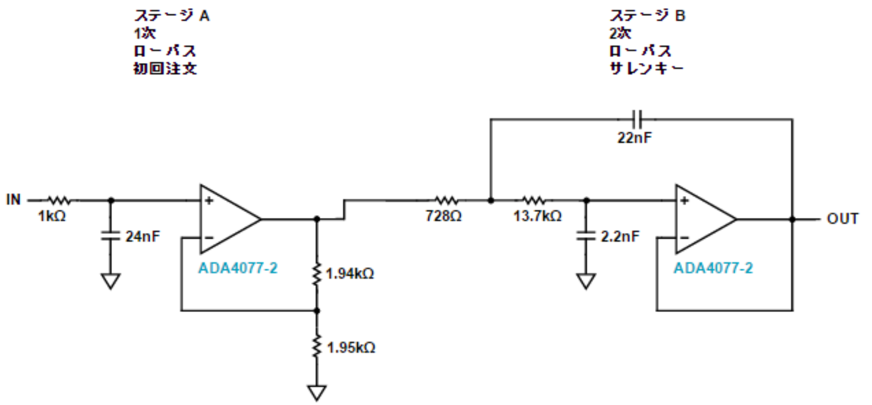
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

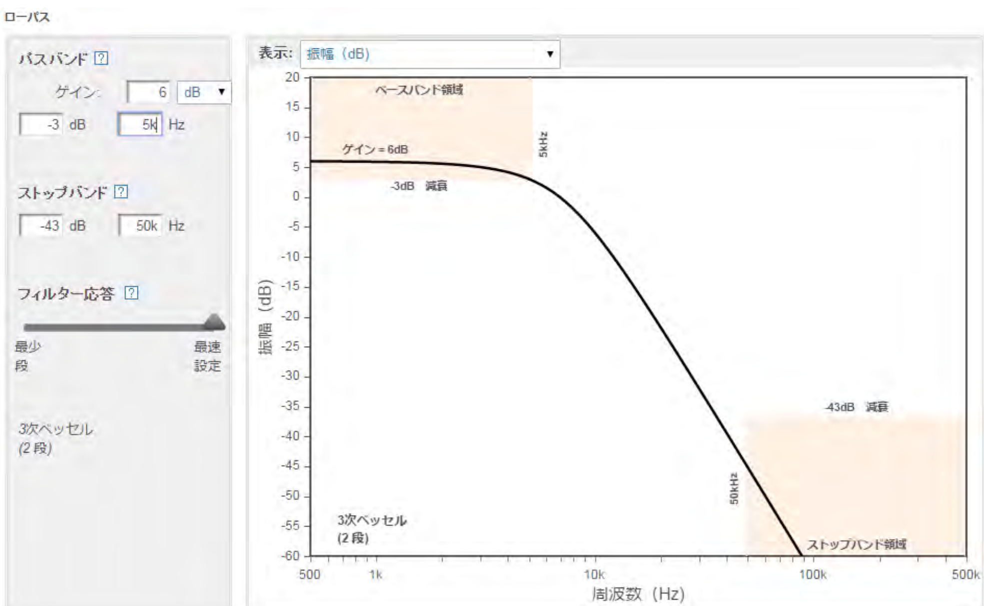
1次のアクティブフィルタ

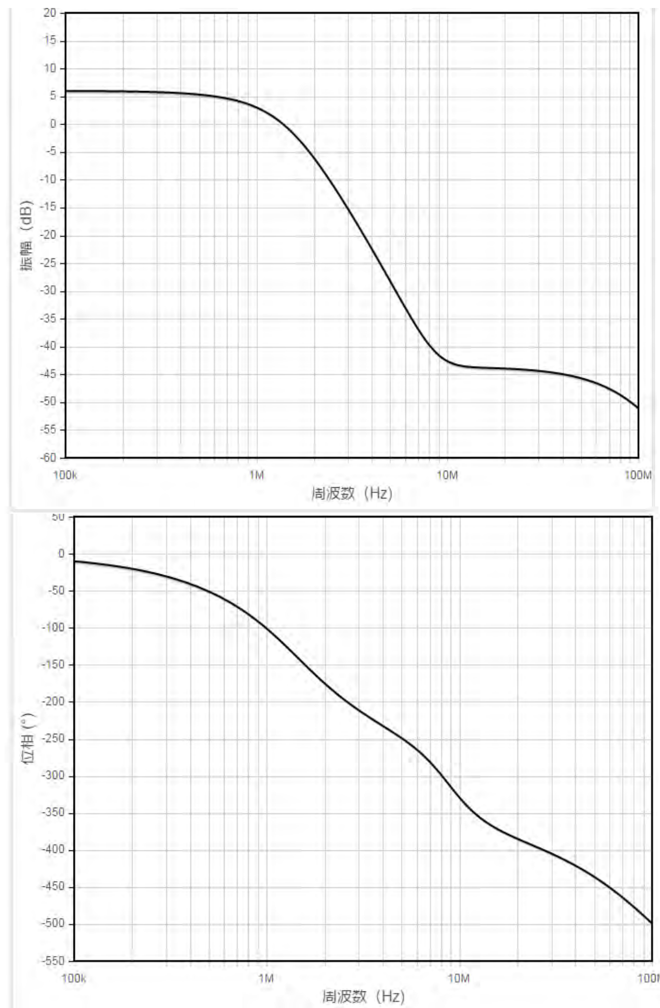




アクティブフィルタの組み合わせ例(3次フィルタ)







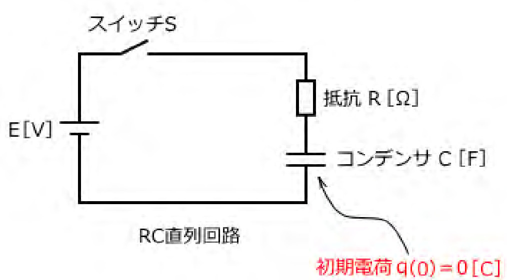
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

http://eleking.net/study/s-transient/str-transient-rc.html

RC直列回路の過渡現象の解き方

RC直列回路に流れる電流の一般解の求め方

次の図のように直流電源E［V］に抵抗R［Ω］とコンデンサC［F］が直列に接続されたRC直列回路において、この回路に流れる電流の一般解を求めてみます。
なお、スイッチSを入れる前のコンデンサCに蓄えられている電荷はゼロとします。（つまり、コンデンサの初期電荷はなく、t＝0でq(0)＝0）



ここで、一般解を求めるとは、定常状態の領域を表わす定常解と過渡状態の領域を表わす過渡解を合わせたもの（式）を求めることで、「一般解を求める＝回路の過渡現象を解く」とほぼ同じ意味と思っておけばいいでしょう。